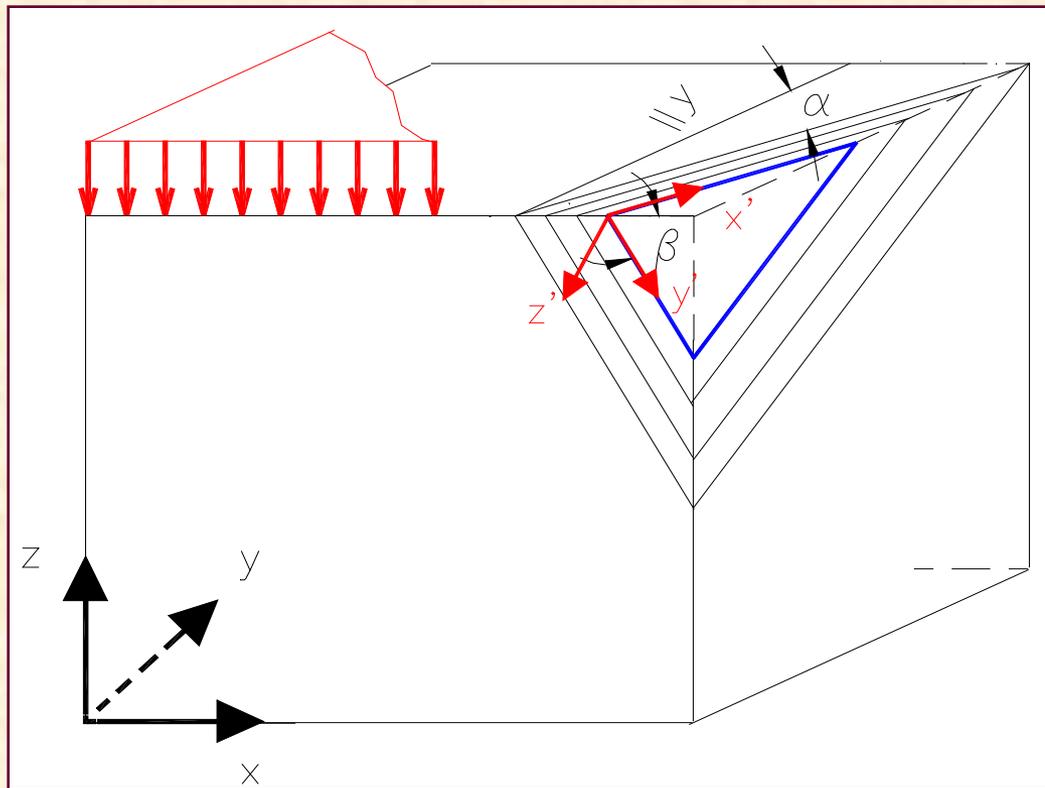


Математичен модел на НДС на системата “ХТС – основа”. Основни дефиниции. Обхват на приложимост на математическите модели на НДС.

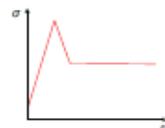
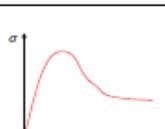
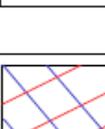
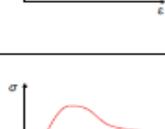
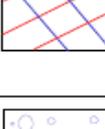
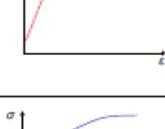
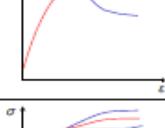
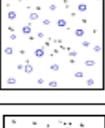


Проф. д-р инж. ВАНГЕЛ ВАСИЛЕВ

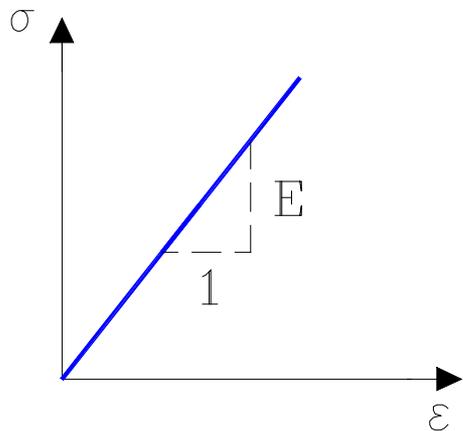
Математичен модел на НДС на системата “ХТС – основа”. Основни дефиниции. Обхват на приложимост на математическите модели на НДС.

1. Схематизация на поведението на земните материали при натоварване
2. Линейно – еластичен изотропен модел
3. Линейно–еластичен трансверзално–изотропен модел
4. Нелинейно–еластичен изотропен модел
5. Линейно–еластичен идеално пластичен модел
6. Линейно–еластичен вискозо-пластичен модел
7. Приложение и обхват на математическите модели

1. Схематизация на поведението на земните материали при натоварване

Материал	Описание	Поведение при натоварване	Теоретичен модел	Описание на математичния модел
	Ненапука-на скала	Еластичен, изотропен материал. Крехко разрушение при много високи напрежения.		До границата на разрушение – математическият апарат на линейната теория на еластичността.
	Скала с единична пукнатина	Пробладаващо еластично поведение. Анизотропия на якостните характеристики, зависеща от наклона на пукнатината.		Числено решение въз основа на теория на еластичността с моделиране на налична на пукнатина.
	Слабонапу-кан скален масив. Оформени системи пукнатини	Трансверзална изотропия; разрушението зависи от характеристиките на пукнатините; дилатансия, нелинейна връзка $\sigma - \epsilon$.		Числено моделиране на нелинейно еластично поведение; моделиране на системите пукнатини и отчитане на дилатансията.
	Средно и силно напукан скален масив	Практически изотропен материал. Значителна дилатансия и при ниски нива на σ , нелинейна връзка $\sigma - \epsilon$.		Числени модели на нелинейно еласто-пластично поведение; моделиране на системите пукнатини с отчитане на дилатансията.
	Уплътнен скален насип	Практически изотропен материал. Еластично поведение при ниски σ , нелинейна връзка $\sigma - \epsilon$ при високи напрежения; дилатансия.		Числени модели на линейно еласто - пластично поведение с отчитане на дилатансията
	Уплътнен насип от баластра или чакъл	Практически изотропен материал. Еластично поведение при ниски σ , нелинейна връзка $\sigma - \epsilon$ при високи напрежения; дилатансия.		Числени модели на линейно еластично идеално – пластично поведение с отчитане на дилатансията
	Уплътнен насип от глинести почви	Практически изотропен материал. Нееластично поведение и при ниски σ , вискозо – пластичност, реология		Числени модели на линейно еластично – вискозо - пластично поведение с отчитане на дилатансията.

2. Линейно – еластичен изотропен модел



**Линейна връзка между σ и ϵ
1D напрегнато състояние**

Съгласно закона на Хooke:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y + \nu\epsilon_z]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2} [\nu\epsilon_x + (1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_z]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2} [\nu\epsilon_x + \nu\epsilon_y + (1-\nu)\epsilon_z]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

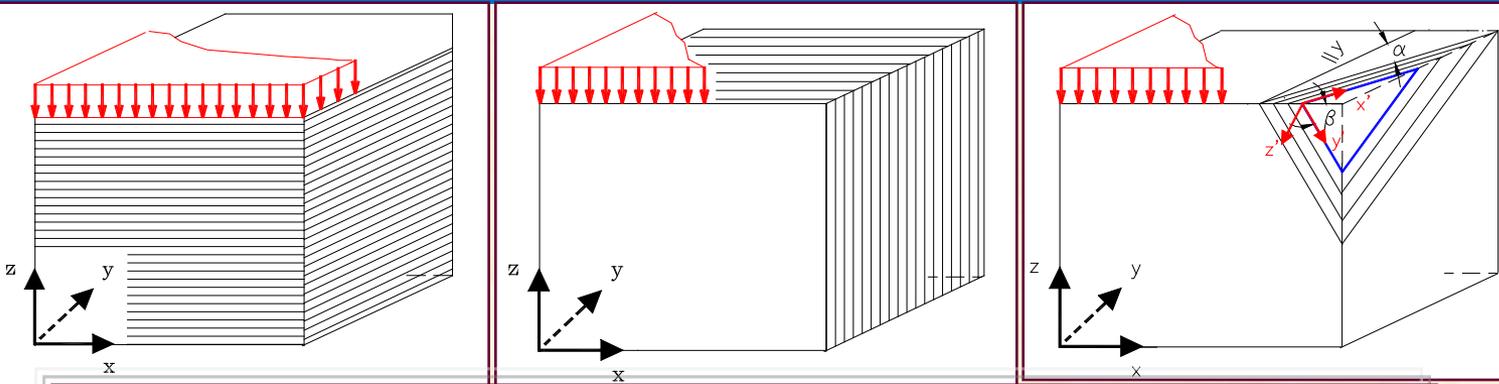
$\{\sigma\}$ - вектор на напреженията;
 $\{\epsilon\}$ - вектор на еластичните деформации;
 $[D]$ - матрица на еластичността.

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy}\}, \quad \{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3. Линейно–еластичен трансверзално–изотропен модел (1)



$$\{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon'\}$$

Осите x' , y' лежат в равнината на изотропия, а оста z' съвпада с направлението на по–голямата деформируемост.

Пет независими една от друга константи:

E_1, E_2 – в равнината на изотропия и \perp на равнината на изотропия;
 ν_1, ν_2 – коеф. на Poisson в равнината и \perp на равн. на изотропия.

$$G_2 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} \quad m = (1 - \nu_1 - 2n\nu_2^2)$$

$$n = E_1/E_2$$

$$[D'] = \begin{bmatrix} E_1 \frac{1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{\nu_1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{\nu_2}{m} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \frac{\nu_1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{\nu_2}{m} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \frac{\nu_1}{m} & E_1 \frac{\nu_2}{m} & E_1 \frac{1 - \nu_1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

3. Линейно–еластичен трансверзално–изотропен модел (2)

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & 0 & 2l_1m_1 & 0 & 0 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & 0 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 & n_2l_1 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & 0 & l_1m_3 + l_3m_1 & m_1n_3 & n_3l_1 \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon'\} = [T^*]\{\varepsilon\}$$

$$[T^*] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & 0 & l_1m_1 & 0 & 0 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_3l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3n_3 & n_3l_3 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 0 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 & n_2l_1 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 0 & l_1m_3 + l_3m_1 & m_1n_3 & m_3l_1 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = \sin \alpha \quad m_1 = \cos \alpha$$

където: $l_2 = \cos \beta \cos \alpha \quad m_2 = -\cos \beta \sin \alpha \quad n_2 = -\sin \beta$

$$l_3 = -\sin \beta \cos \alpha \quad m_3 = \sin \beta \sin \alpha \quad n_3 = -\cos \beta$$

В глобалната координатна система x, y, z :

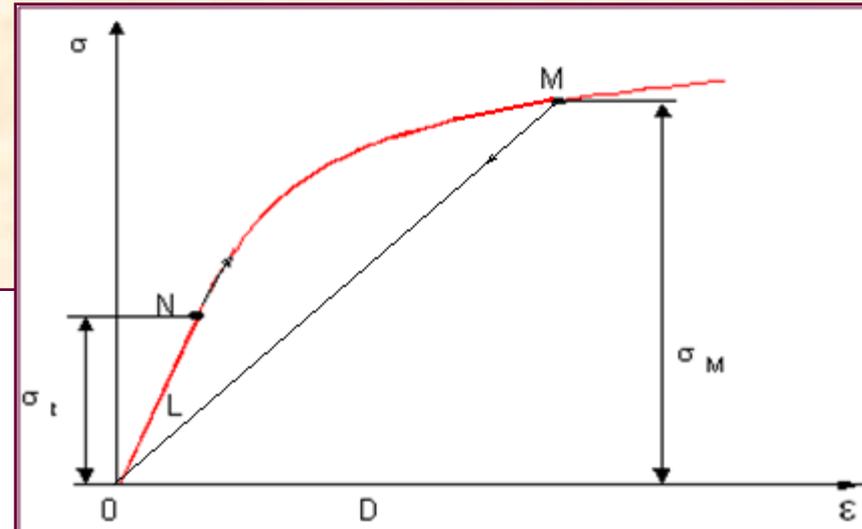
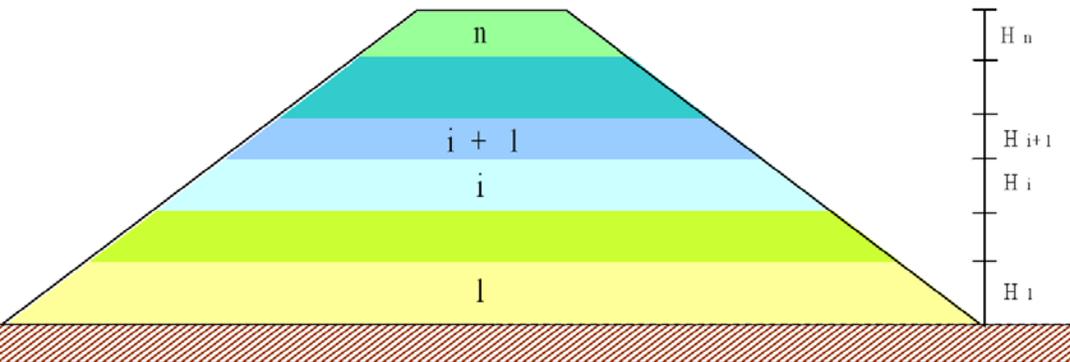
$$\{\sigma\} = [T]^{-1}[D'][[T^*]\{\varepsilon\}]$$

$$[D] = [T^*][D'][[T^*]^T]$$

4. Нелинейно–еластичен изотропен модел (1)

- Почви - пластични деформации при ниски нива на напреженията

- Насипни стени: изменение на плътността на насипа и НДС \Rightarrow деформационни и якостни х-ки E, ν, C, γ .



$$E = f_1(\sigma_z)$$

$$\nu = f_2(\sigma_z)$$

$$E = f_3(\sigma_1/\sigma_3, \sigma_3)$$

$$\nu = f_4(\sigma_1/\sigma_3, \sigma_3)$$

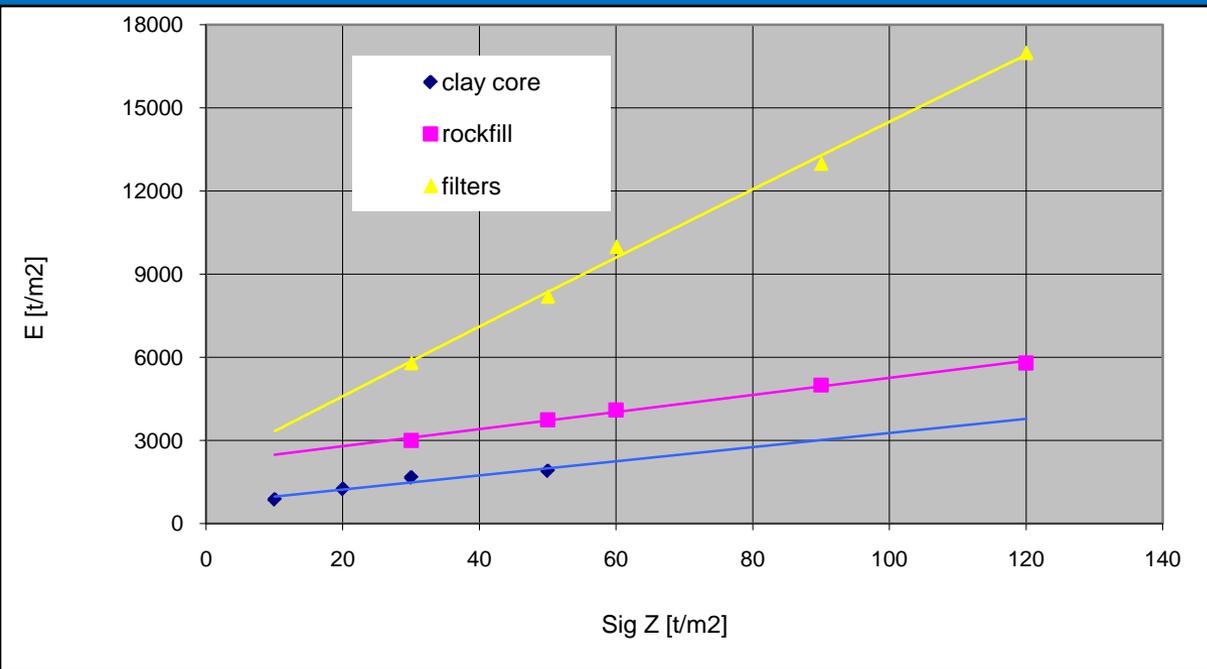
$$E = f_5(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_3)$$

$$\nu = f_6(\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_3)$$

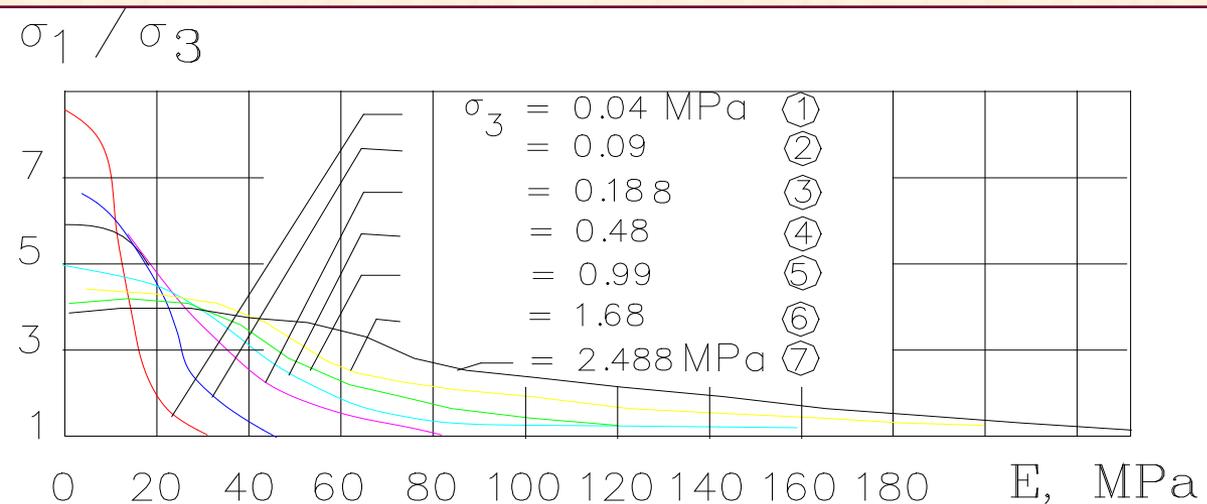
$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \Rightarrow [D] = \text{const.}$$

$$\{\sigma\} = [D^*] \cdot \{\varepsilon\} \Rightarrow [D^*] = f(E, \nu) \Rightarrow f(\{\sigma\})$$

4. Нелинейно–еластичен изотропен модел(2)



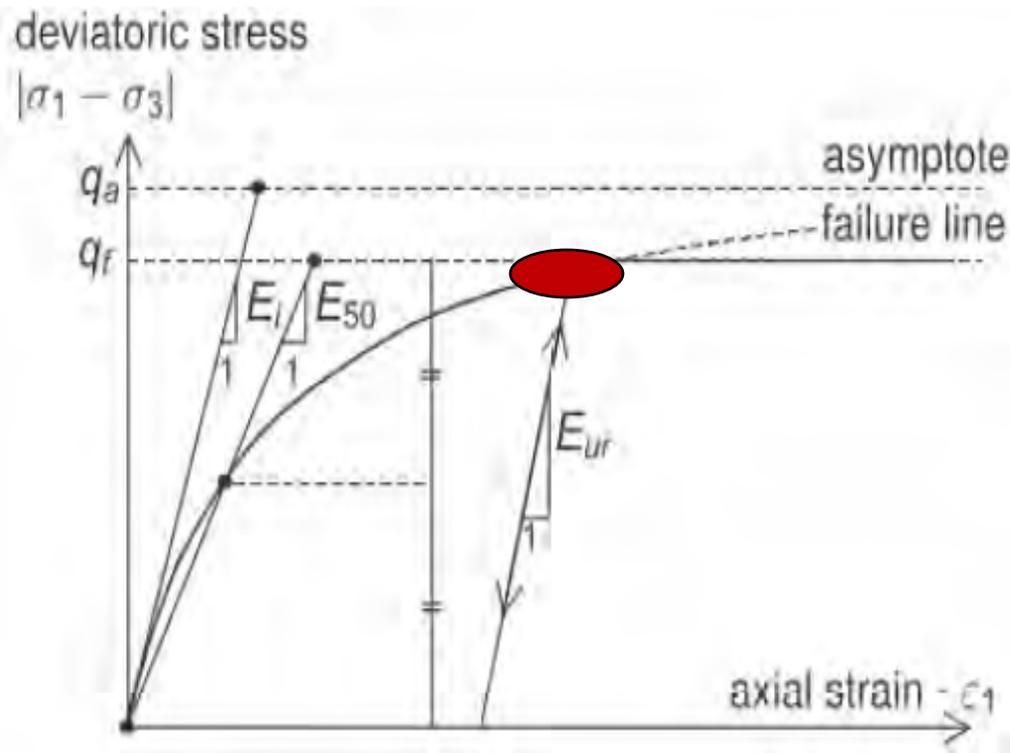
Графики на $E = f(\sigma_z)$ на материалите за насип на яз. стена АСЕНОВЕЦ



Графики на $E = f(\sigma_1, \sigma_3)$ за насип от диорити ($d_{\max} = 200$ mm, $I_D = 0.90$)

4. Нелинейно–еластичен изотропен модел (2)

DUNCAN-CHANG (HYPERBOLIC) MODEL



$$E_t = \left[1 - R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]^2 K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

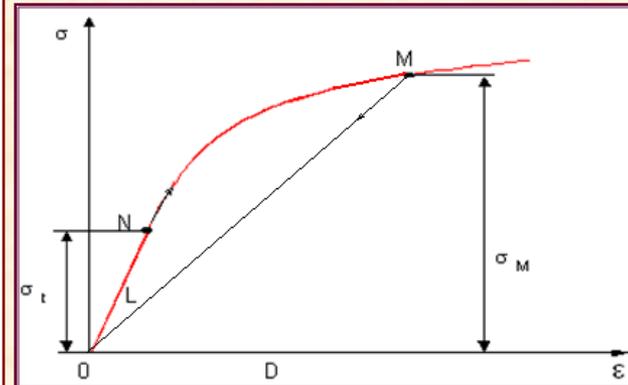
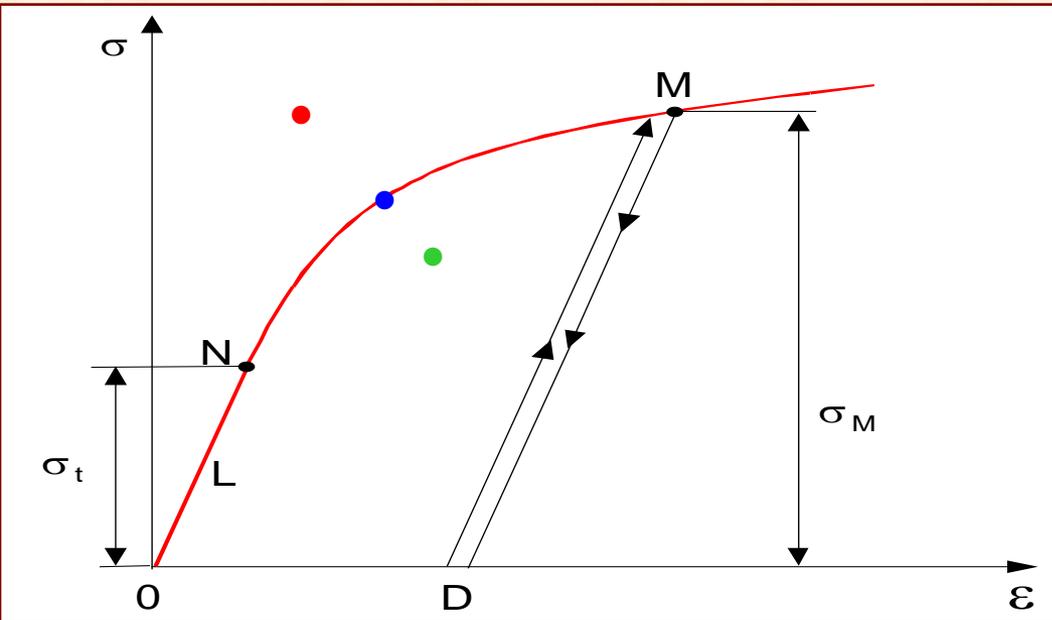
R_f , K , n - параметри на материала

$$E_{50} = E_{50}^{ref} \left(\frac{c \cot \varphi - \sigma_3}{c \cot \varphi - \sigma^{ref}} \right)^m$$

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref} \left(\frac{c \cot \varphi - \sigma_3}{c \cot \varphi - \sigma^{ref}} \right)^m$$

Duncan: Моделът “дава приемливо точни резултати за много проблеми, включително движения в земни маси, които не са в състояние близо до разрушение”. И още: “моделът отразява много лошо свойствата на почвите в моменти на и след разрушение”.

5. Линейно-эластичен идеално пластичен модел



$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, K_i) = 0 \quad (i, j=1,2,3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{eij} + \varepsilon^{pij};$$

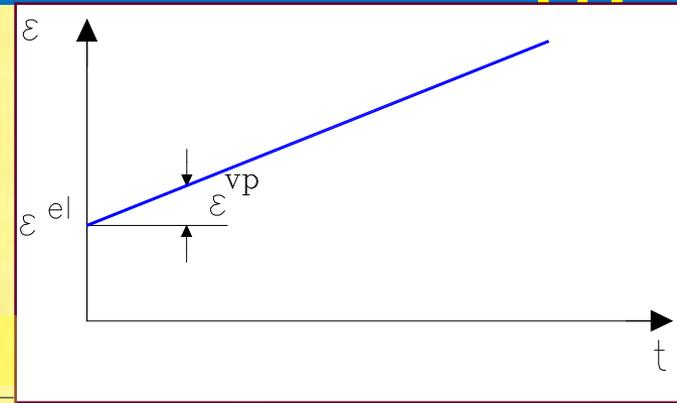
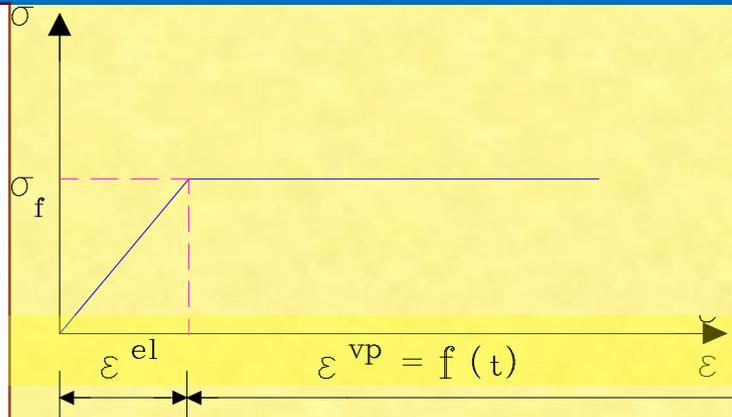
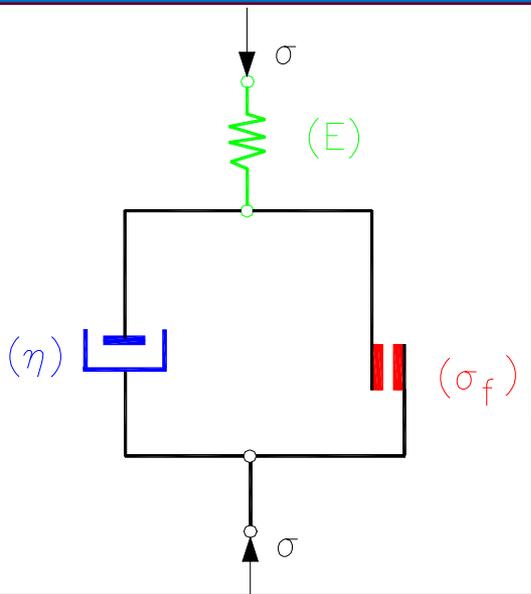
$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^{eij} + d\varepsilon^{pij} \quad (i, j=1,2,3)$$

- $df = d'f = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) \cdot d\sigma_{ij} > 0; \quad (i, j=1,2,3)$
 $d\varepsilon^{pij} > 0; \quad dK_i = 0$

$$d\varepsilon^{pij} = d\lambda \cdot (\partial f / \partial \sigma_{ij}) \quad (\text{асоцииран закон на пластично течение})$$

$$d\lambda = (3/2)^{0.5} \cdot d\varepsilon^{pij} / \{ (\partial f / \partial \sigma_{ij}) (\partial f / \partial \sigma_{ij}) \}^{0.5} \quad (\text{множител на Лагранж})$$

6. Линејно-еластичен вискозо-пластичен модел (1)



$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{el}\} + \{\epsilon_{vp}\} + \{\epsilon^0\}$$

$$\{\epsilon^{el}\} = [D]^{-1} \cdot \{\sigma\}$$

$$\left\{ \frac{d\epsilon^{vp}}{dt} \right\} = \gamma \cdot f\left(\frac{F}{F_0}\right) \cdot \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}$$

$$F = \frac{1}{2}[\sigma_1(1 - \sin \varphi)] - \frac{1}{2}[\sigma_3(1 + \sin \varphi)] - C \cos \varphi = 0$$

$$Q = \frac{1}{2}[\sigma_1(1 - \sin \psi)] - \frac{1}{2}[\sigma_3(1 + \sin \psi)] - C \cos \psi = 0$$

Ако $F = Q \implies$

асоциран закон на пластично течение

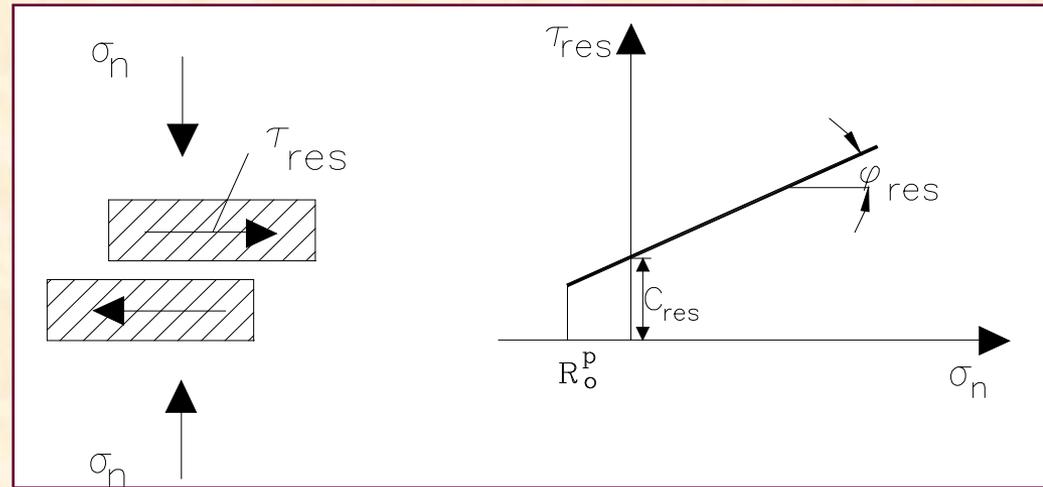
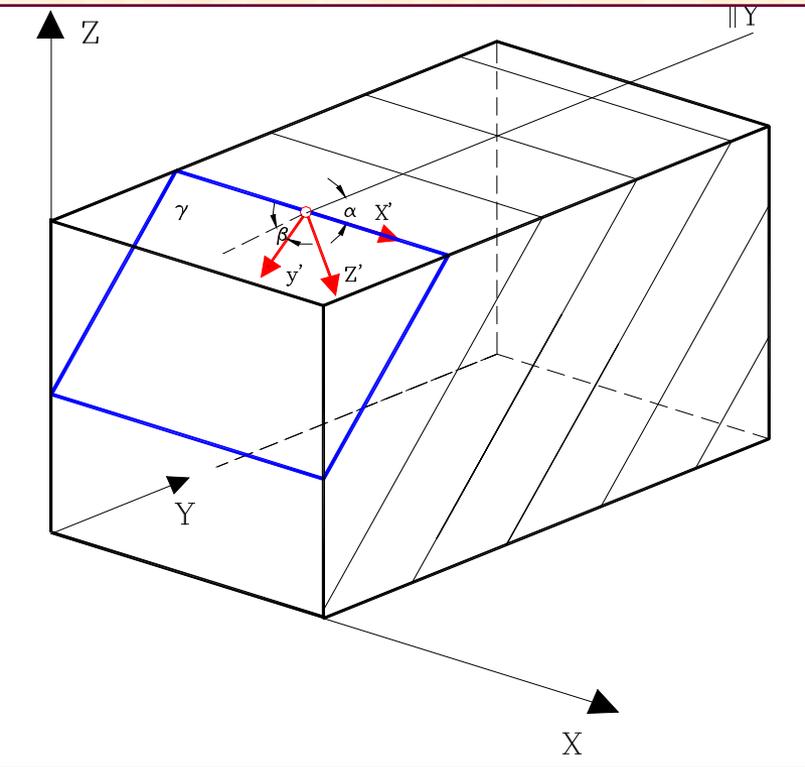
Ако $F \neq Q \implies$

неасоциран закон на пластично течение.

$$\frac{d\{\sigma\}}{dt} = [D] \frac{d\{\epsilon\}}{dt} - \gamma \cdot f\left(\frac{F}{F_0}\right) \cdot [D] \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

$$F = -\sigma_3 - \sigma_t = 0$$

6. Линејно-еластичен вискозо-пластичен модел (2)



Обобщен критерий за разрушение
в равнина с намалена якост

$$F = \tau_{res} + \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \varphi_{res} - C_{res} = 0$$

$$F = \sigma'_z - R_0^p = 0$$

7. Приложение и обхват на математическите модели

Анализ на местната устойчивост на яз. стена ЧАИРА

Линейно – еластично решение

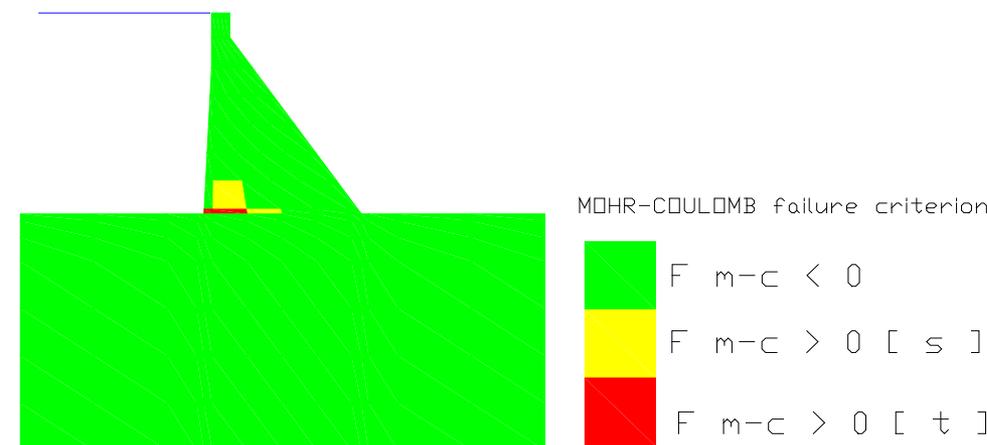
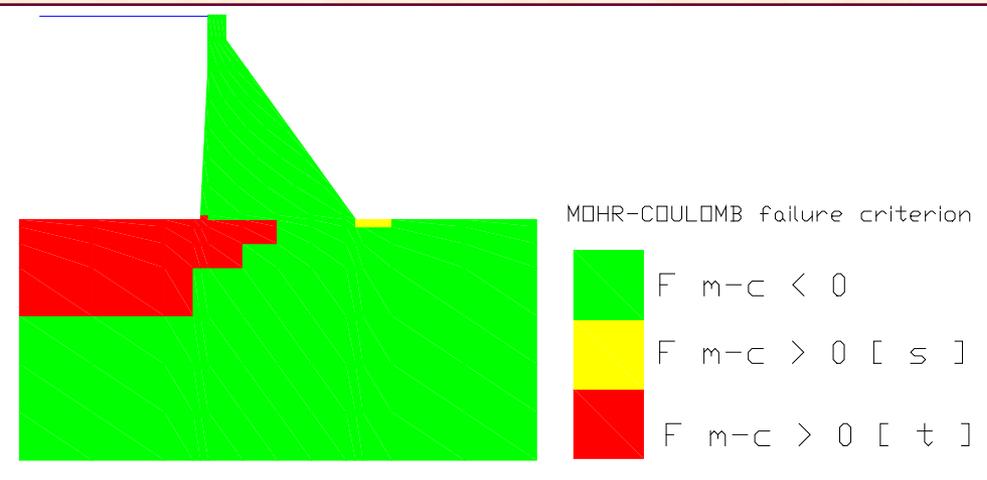
ЛЕГЕНДА

Зелен цвят – устойчива зона

Жълт цвят – местно разрушение от тангенциални напрежения

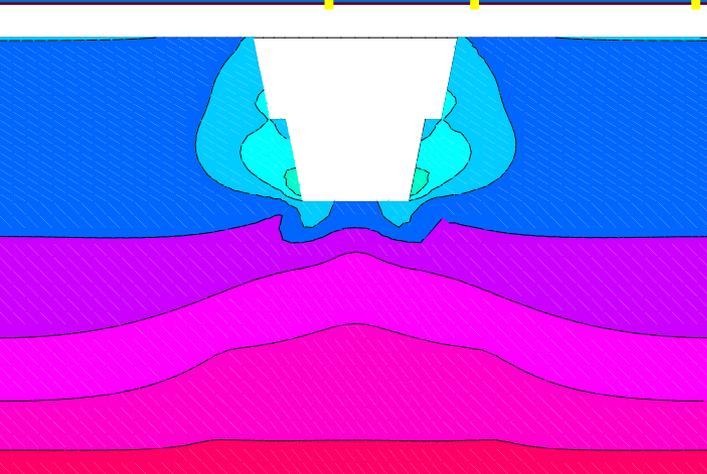
Червен цвят – местно разрушение от опънни напрежения

Нелинейно решение

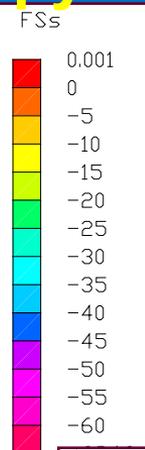


7. Приложение и обхват на математическите модели

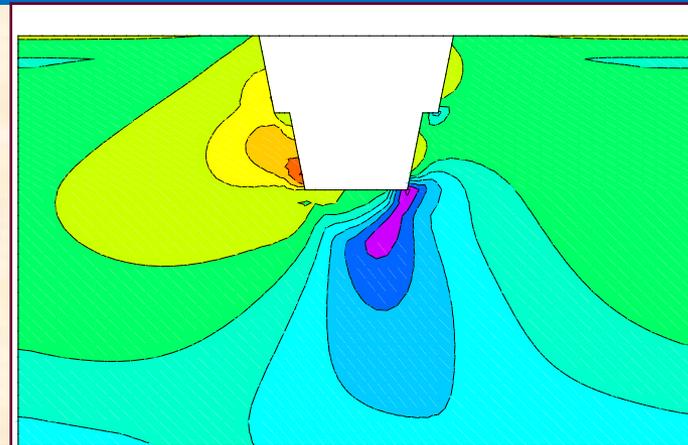
Критерий за разрушение на скалния масив



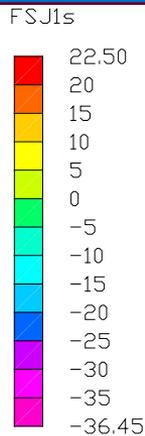
• Ненапукан скален масив



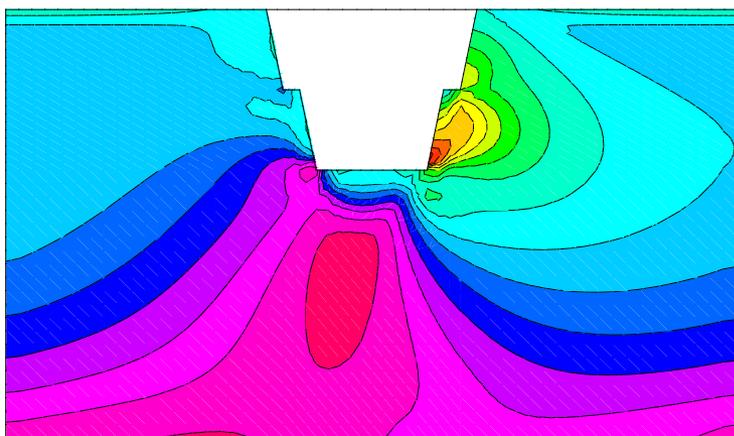
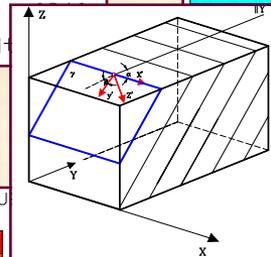
Unit



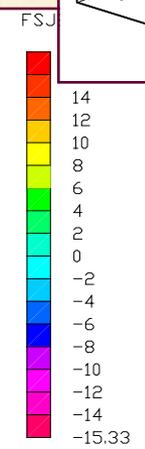
• Система пукнатини 1 $\alpha=45, \beta=45$



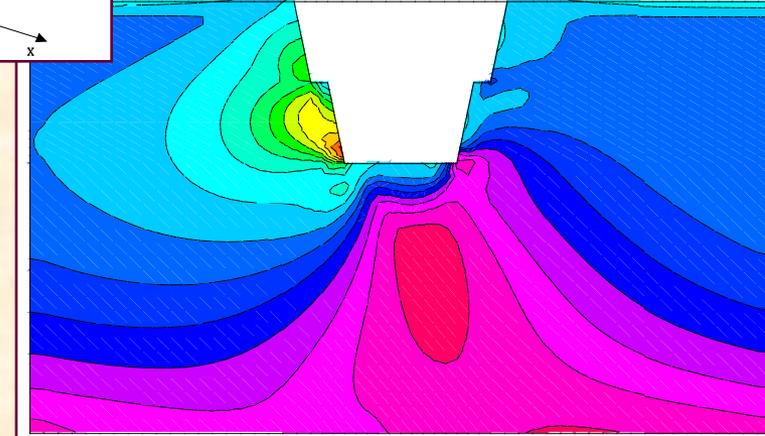
Unit



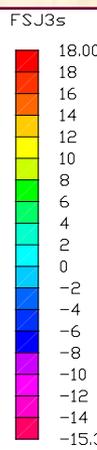
• Система пукнатини 2 $\alpha=0, \beta=45$



Unit

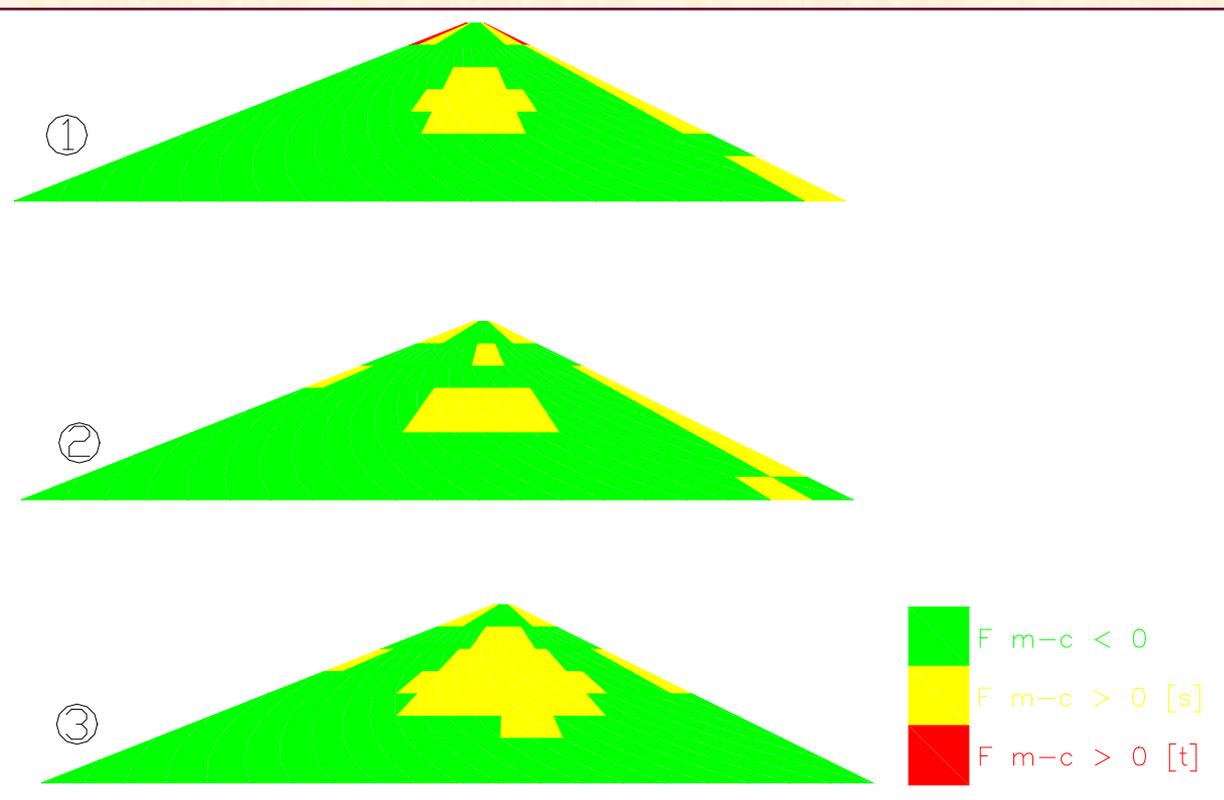


• Система пукнатини 3 $\alpha=0, \beta=135$



Unit

7. Приложение и обхват на математическите модели



ЛЕГЕНДА
Зелен цвят – устойчива зона;

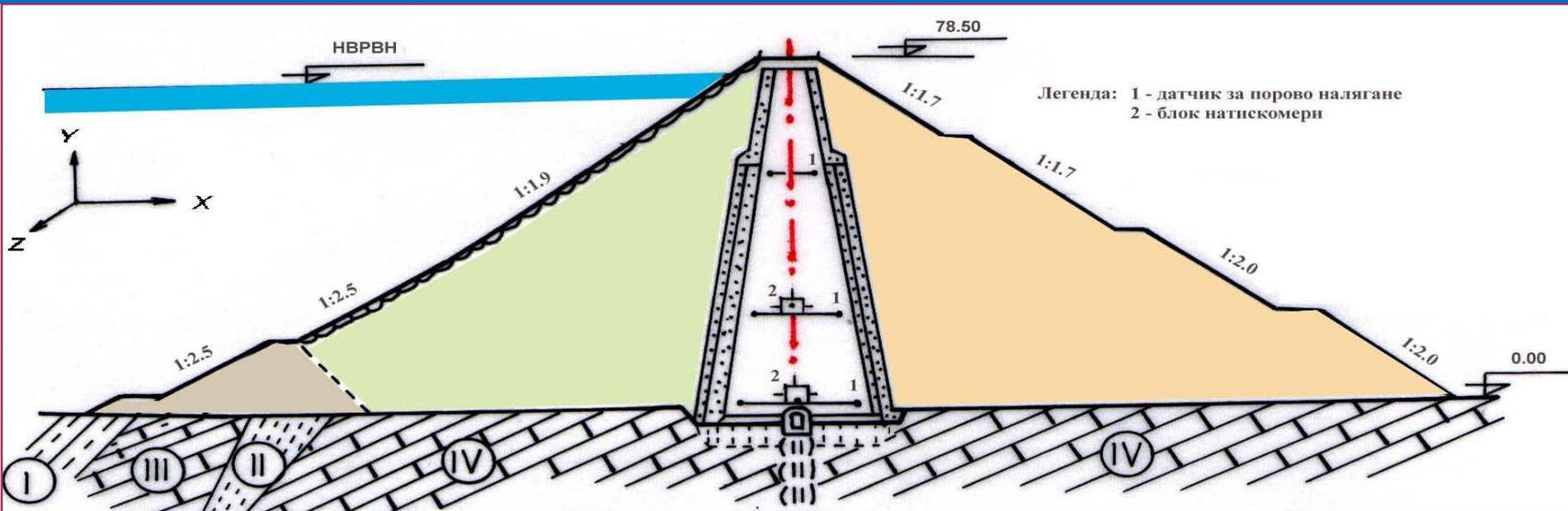
Жълт цвят – местно разрушение от тангенциални напрежения;

Червен цвят – местно разрушение от опънни напрежения.

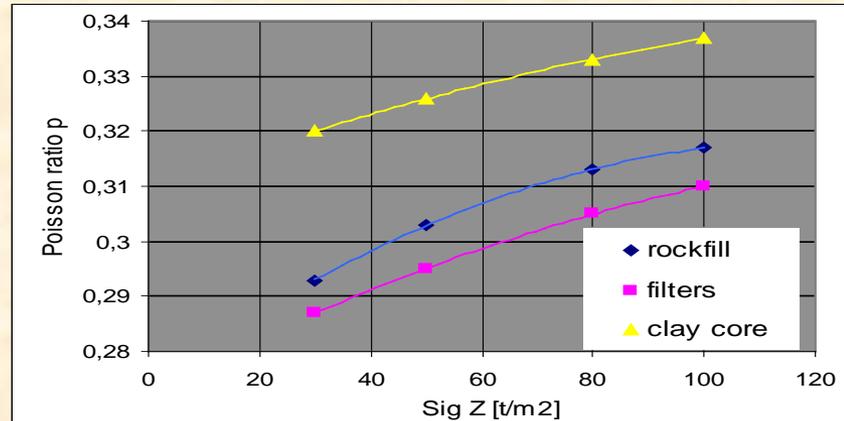
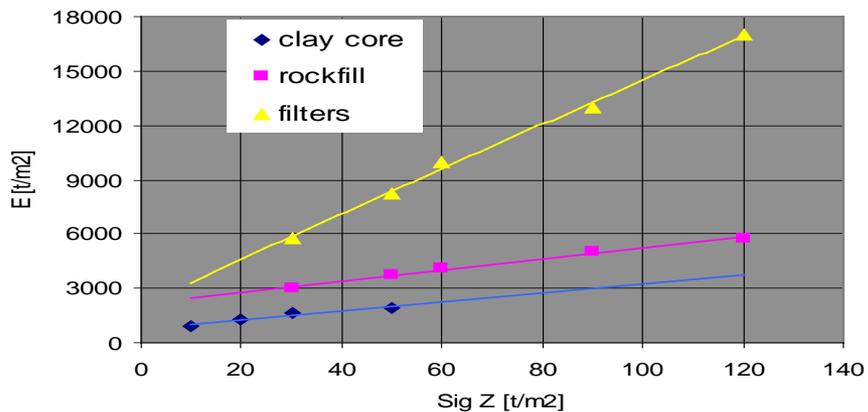
- ① линейно - еластичен модел, мигновено изградена стена
- ② линейно - еластичен модел, изграждане в три етапа
- ③ нелинейно - еластичен модел, изграждане в три етапа

Анализ на местната устойчивост на яз. стена РАКОЧЕВИЦА

7. Приложение и обхват на математическите модели



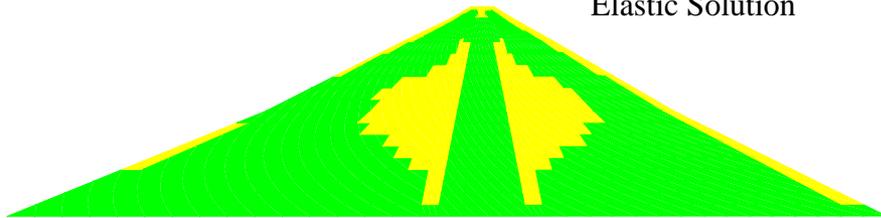
Напречен профил на язовирна стена АСЕНОВЕЦ



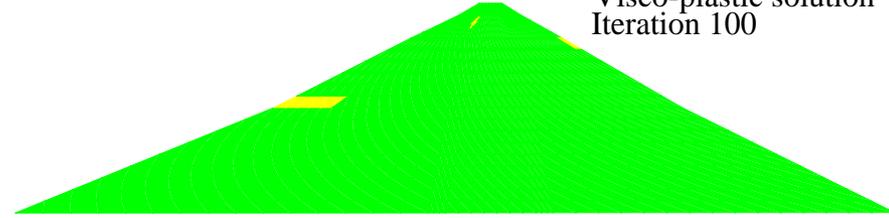
7. Приложение и обхват на математическите модели

ASENOVEC Rockfill Dam - YelDED Zones (M-C Failure Criterion)
Non-Associated Flow Rule ($\psi = 15 \text{ deg}$, $\nu = 0.00001$, $dt = 5 \text{ sec}$)

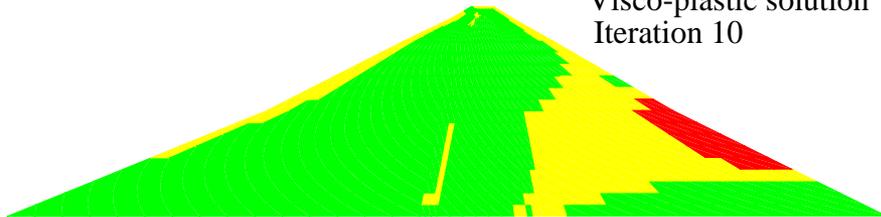
Elastic Solution



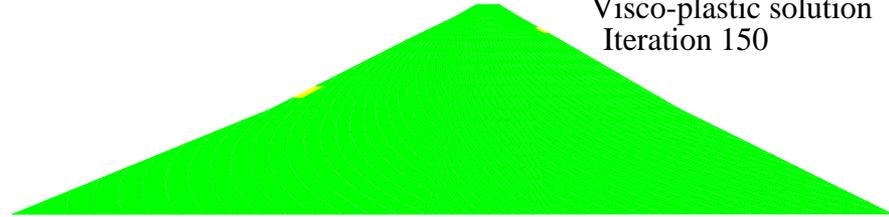
Visco-plastic solution
Iteration 100



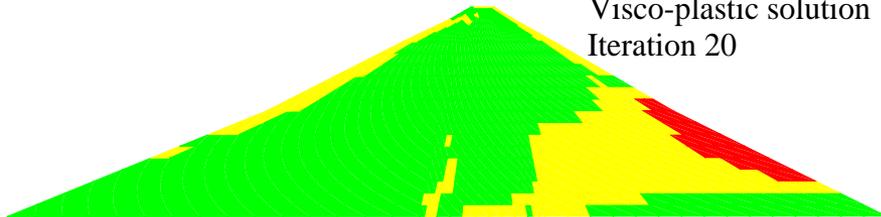
Visco-plastic solution
Iteration 10



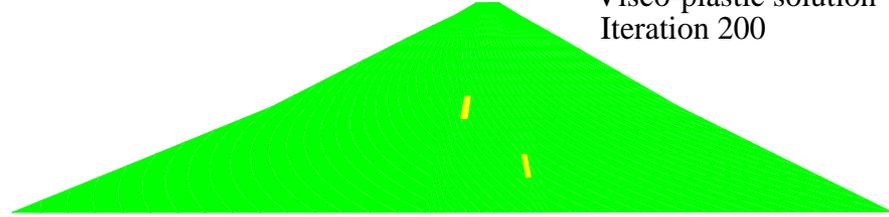
Visco-plastic solution
Iteration 150



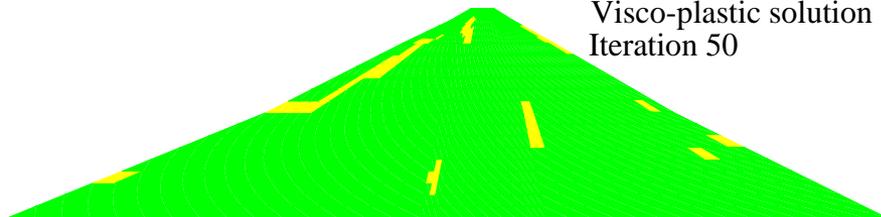
Visco-plastic solution
Iteration 20



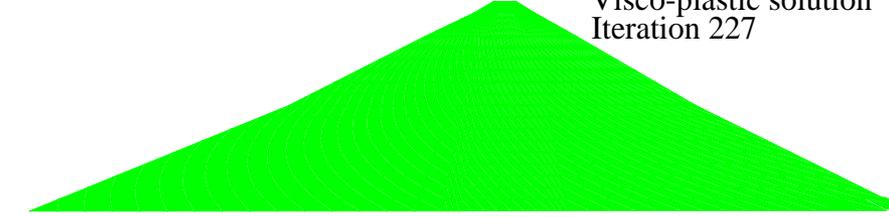
Visco-plastic solution
Iteration 200



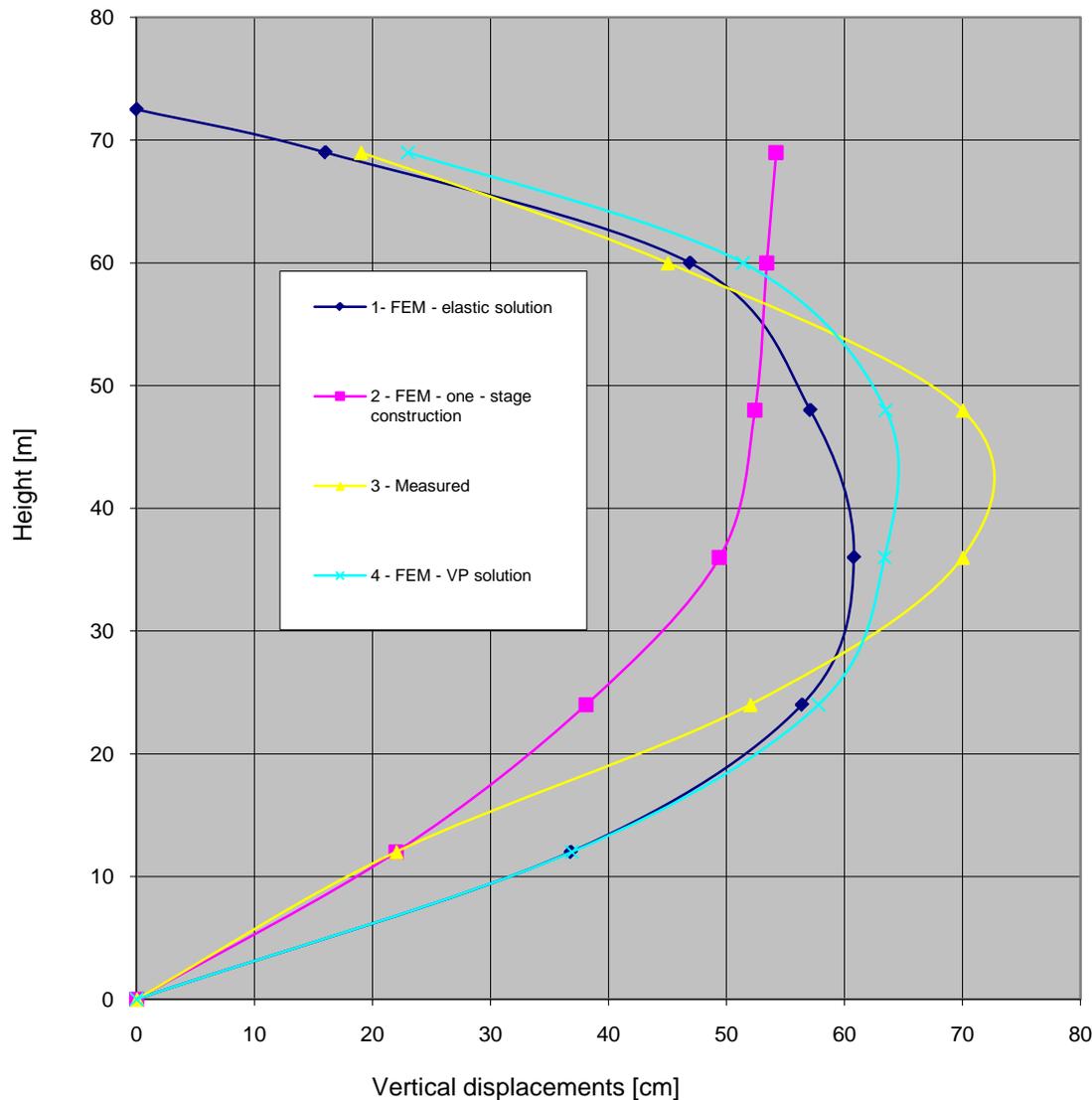
Visco-plastic solution
Iteration 50



Visco-plastic solution
Iteration 227



7. Приложение и обхват на математическите модели



Вертикални премествания
в оста на ядрото на яз. стена
АСЕНОВЕЦ

**(сравнение на измерени и
изчислени стойности-
еластичен и вискозо-
пластичен модел)**

Използвана литература

Василев, В. (2001), Дисертация за присъждане на научна степен “Доктор на техническите науки” на тема: “*Моделиране на напрегнатото състояние на масивни хидротехнически съоръжения по метода на крайните елементи.*”

DUNCAN, J. M., C. Y. CHANG, 1970. Nonlinear analysis of stress and strains in soils, *Journal of the Soil Mechanics and foundation Division* (Proc. of the ASCE), Vol. 96, SM5, Sept. 1970.

WITTKE, W. ,1990. *Rock Mechanics*, Berlin – Heidelberg.

ZIENKIEWICZ, O. C., Y I. CORMEAU, 1974. Visko - Plasticity and Creep in Elastic Solids - A Unified Numerical Solution Approach, *Int J. Numerical Methos in Engineering*, Vol.8, p. 821 – 845