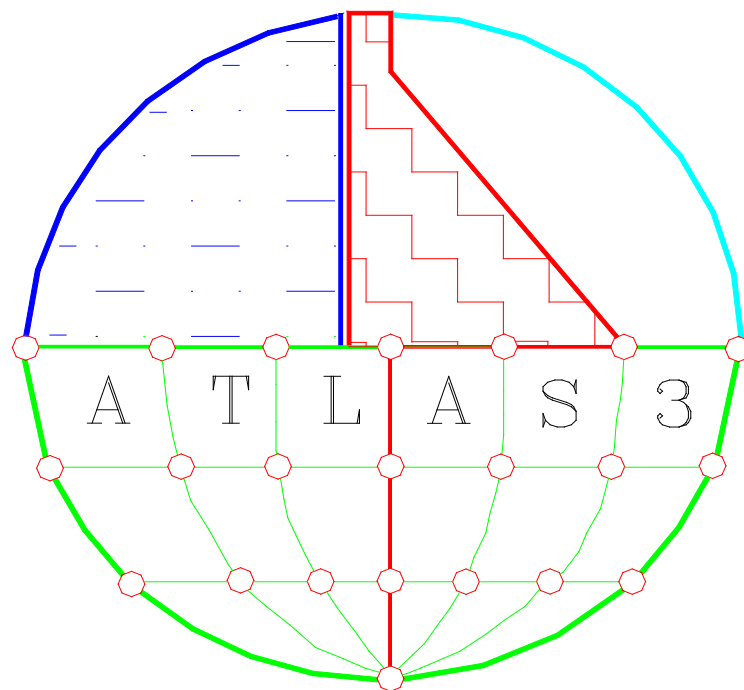


Метод на крайните елементи. Основни понятия, дефиниции, реализация, приложение



Проф. д-р инж. ВАНГЕЛ ВАСИЛЕВ

Метод на крайните елементи

I. Исторически бележки

II. Основни уравнения

III. Основни етапи на реализация

IV. МКЕ в геотехниката и хидротехниката

Метод на крайните елементи

I. ИСТОРИЧЕСКИ БЕЛЕЖКИ

(1-2)

- 1906 г.** Предлага се решетъчна аналогия за моделирането на непрекъснати среди със система от еластични пръти;
- 1935 г. HARDY CROSS** предлага деформационно-итеративен метод за решаване на статически неопределими греди;
- 1941 г. CURANT** предлага разделянето на сеченията на усукан прът на триъгълни области, това по същество е МКЕ;
- 1953 г. TURNER** от компания Боинг предлага триъгълен равнинен краен елемент за моделиране на обшивката на делта-крило;

Метод на крайните елементи

I. ИСТОРИЧЕСКИ БЕЛЕЖКИ

(2-2)

- 1960 г.** **CLOUGH** предлага названието **Метод на крайните елементи**;
- 1961 г.** Публикувани са **10 научни статии** за МКЕ;
- 1967 г.** **ZIENKIEWICZ И CHUNG**, публикувана е първата книга за МКЕ;
- 1971 г.** Публикувани са **844 статии** за МКЕ;
- 1976 г.** Публикувани са **над 7000 статии** за МКЕ;
- 2000 г.** – до днес ???
- Днес:** ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, SAP, ADINA, ALGOR, COSMOS, MIDAS GTS, DIANA, PLAXIS, FLAC, Rocscience ...

Метод на крайните елементи

II. ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ (1-3)

Неизвестни компоненти НДС:

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z); \\ \sigma_x &= f_4(x, y, z); \\ \tau_{xy} &= f_7(x, y, z); \\ \epsilon_x &= f_{10}(x, y, z); \\ \gamma_{zx} &= f_{15}(x, y, z). \end{aligned}$$

където:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}; \quad \lambda = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu};$$

$$\theta = 3\varepsilon_{cp}; \varepsilon_{cp} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$\rho X, \rho Y, \rho Z$ = обемни сили

Основни уравнения ЛТЕ:

Уравнения на равновесието:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0; \\ (2) \quad & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0. \end{aligned}$$

Геометричні уравнения(КОШИ):

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Физически уравнения(закон на ХУК):

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

Метод на крайните елементи

II. ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ (2-3)

Алгоритъм за решение на задачата на ЛТЕ:
(Метод на преместванията)

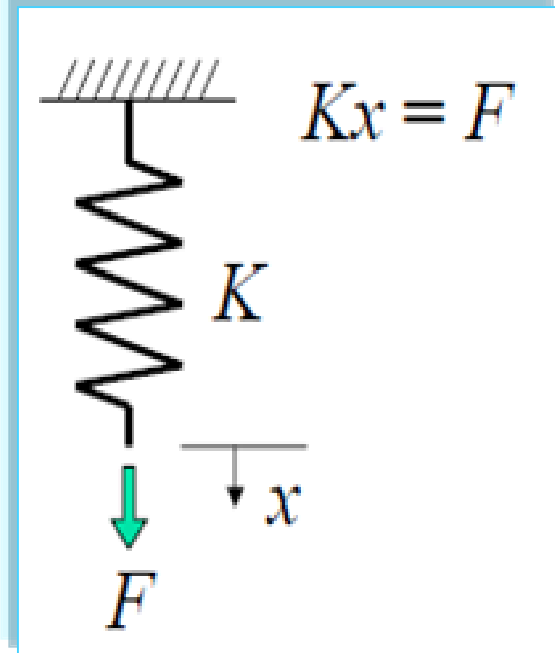
- ▶ Приемат се за основни неизвестни преместванията на точка от еластичното тяло: $u=f_1(x,y,z)$; $v=f_2(x,y,z)$; $w=f_3(x,y,z)$;
- ▶ Напреженията се изразяват чрез преместванията, т.е. геометричните уравнения (3) се поставят във физическите уравнения (4);
- ▶ Получените изрази се заместват в уравненията на равновесието (2) и се получава система от три уравнения с три неизвестни - преместванията на точката по оси x , y , z ;
- ▶ Решава се системата от три уравнения с три неизвестни и с това се определят преместванията на точката по оси x , y , z .

МЕТОД НА ПРЕМЕСТВАНИЯТА $\longleftrightarrow$ МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ

Метод на крайните елементи

II. ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ (3-3)

- Пружинна аналогия: K – пружинна константа;
 x – преместване;
 F – товар (сила).



$$K = \frac{G.d^4}{8.n.D^3}$$

- Основно уравнение на МКЕ:

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

Ползвател

Preprocess

Създаване на МКЕ модел



Компютър

Process

Изчисления



Ползвател

Postprocess

**Извличане и Анализ
на резултати**

Метод на крайните елементи

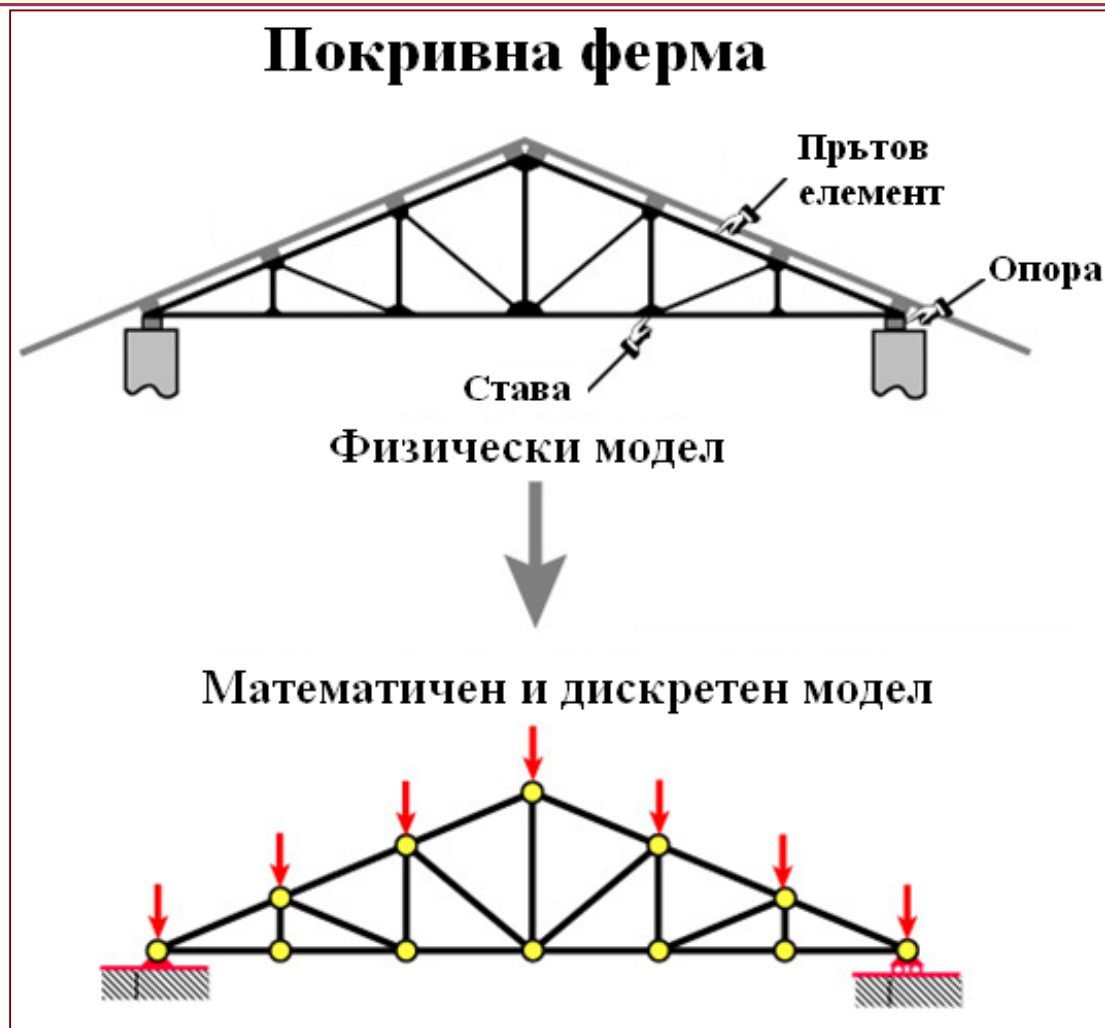
III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

- 1 СЪЗДАВАНЕ НА ИДЕАЛИЗИРАН МОДЕЛ НА СИСТЕМАТА
ИНЖЕНЕРНО СЪОРЪЖЕНИЕ – ЗЕМНА (СКАЛНА) ОСНОВА
- 2 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА СИСТЕМАТА ЧРЕЗ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ
- 3 ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОРАВИНАТА НА СИСТЕМАТА
- 4 ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ВЕКТОРА НА НАТОВАРВАНЕТО и ПРИЛАГАНЕ на
ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ
- 5 РЕШАВАНЕ НА СИСТЕМАТА ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ
- 6 ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОМПОНЕНТИТЕ НА НДС
- 7 ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

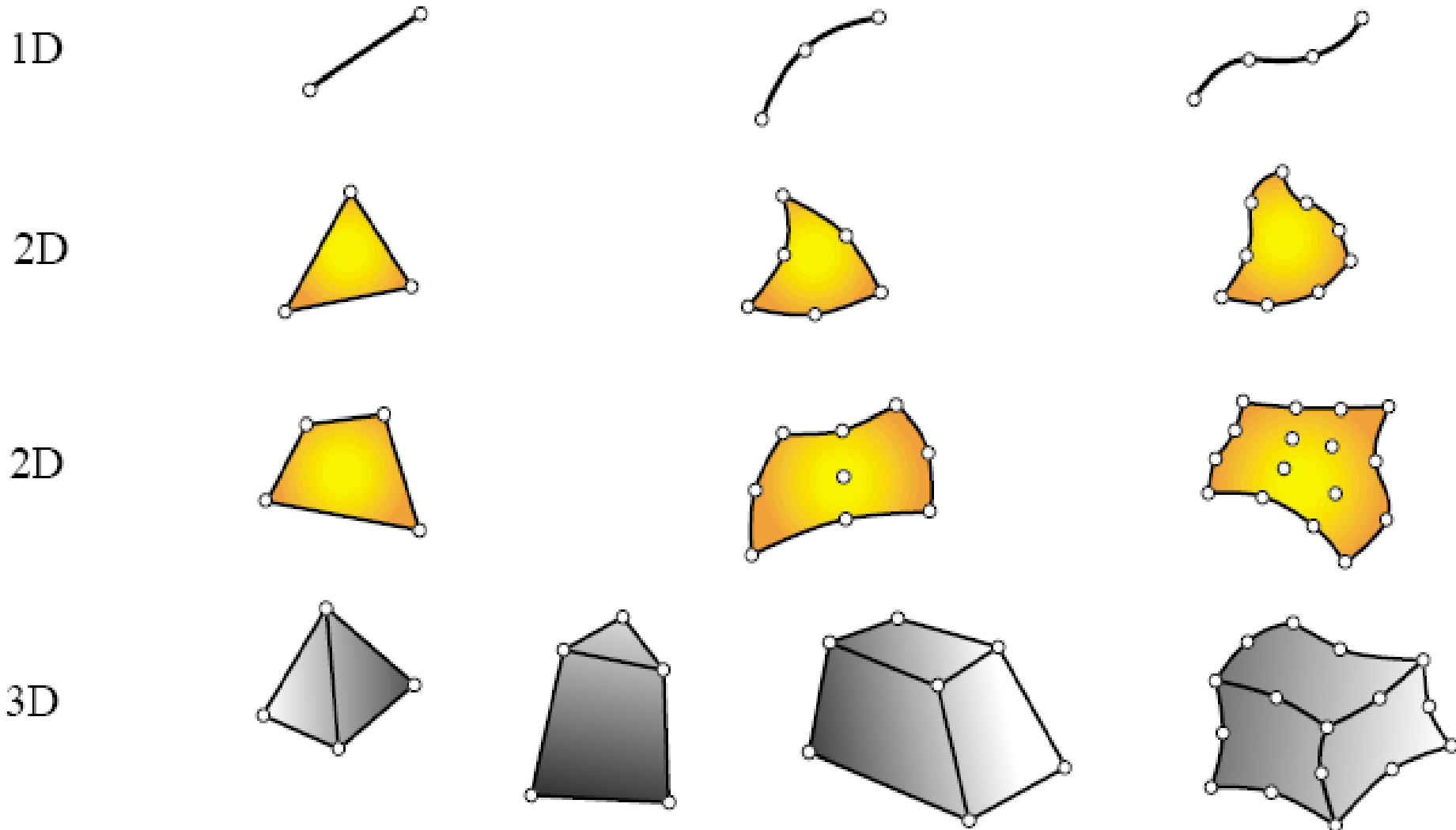
① СЪЗДАВАНЕ НА ИДЕАЛИЗИРАН МОДЕЛ НА СИСТЕМАТА ИНЖЕНЕРНО СЪОРЪЖЕНИЕ – ЗЕМНА (СКАЛНА) ОСНОВА



Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

② ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА СИСТЕМАТА ЧРЕЗ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ (1-4)



Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

② ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА СИСТЕМАТА ЧРЕЗ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ (2-4)

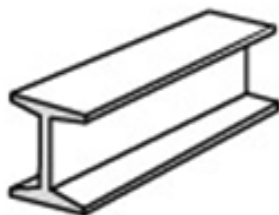
Структурен
елемент

Математичен
модел

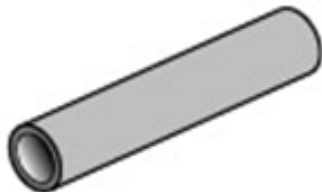
Краен елемент



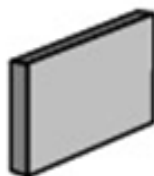
Прът



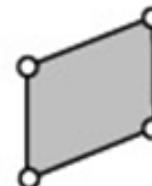
Греда



Тръба



Плоча



Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

② ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА СИСТЕМАТА ЧРЕЗ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ (3-4)

Добре

Лошо

Aspect Ratio:

~ 1 Отлично

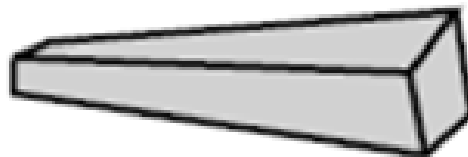
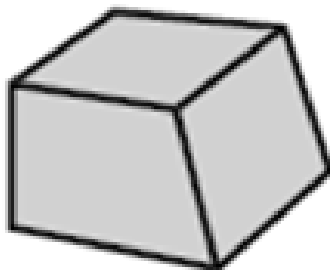
= 1÷2 Мн. добре

= 2÷3 Добре

= 3÷5 Задовол.

= 5÷10 Приемливо

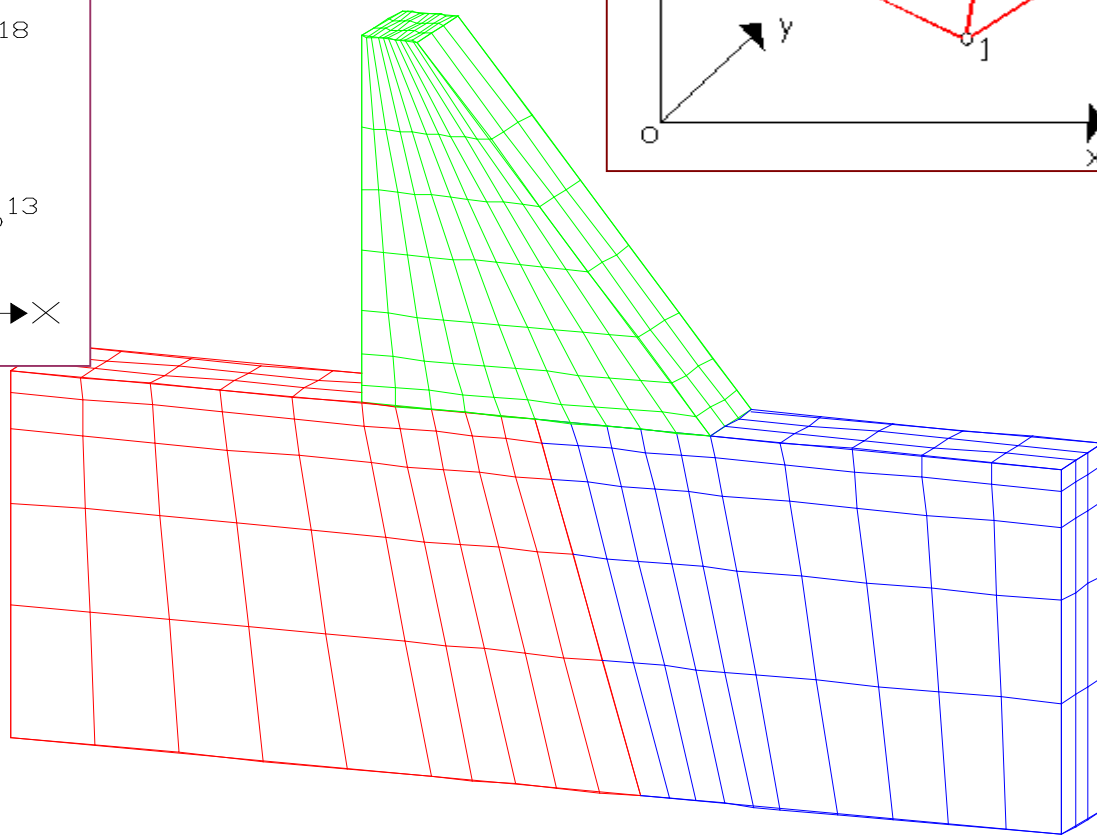
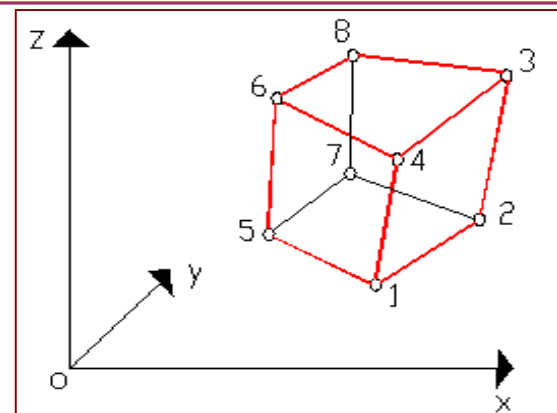
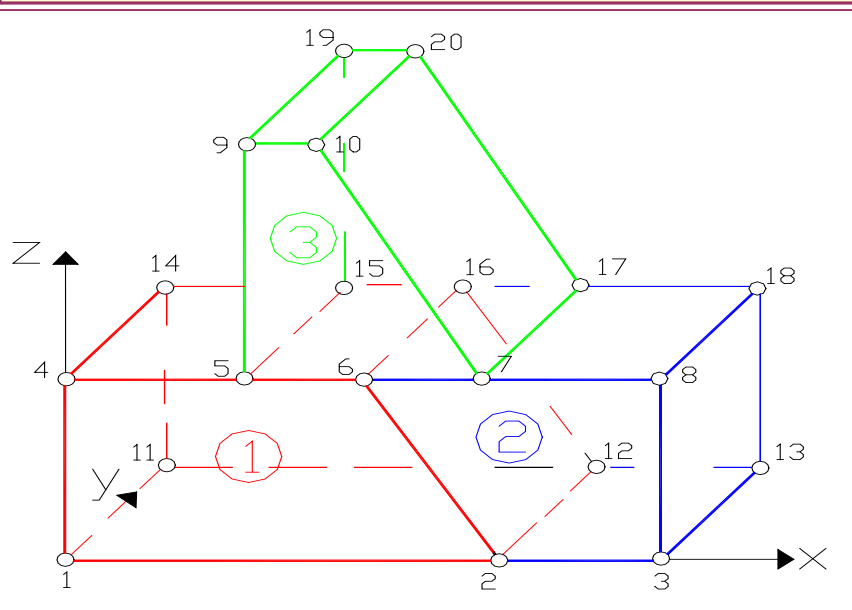
> 10 Неприемливо



Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

② ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НА СИСТЕМАТА ЧРЕЗ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ (4-4)



Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

③ ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОРАВИНАТА НА СИСТЕМАТА

(1-3)

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

където: $[K]$ - матрица на коравината на системата;
 $\{u\}$ - вектор на преместванията на възлите от системата;
 $\{F\}$ - вектор на натоварването върху системата.

Матрица на коравината на един краен елемент:

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV$$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

3 ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОРАВИНАТА НА СИСТЕМАТА

(2-3)

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

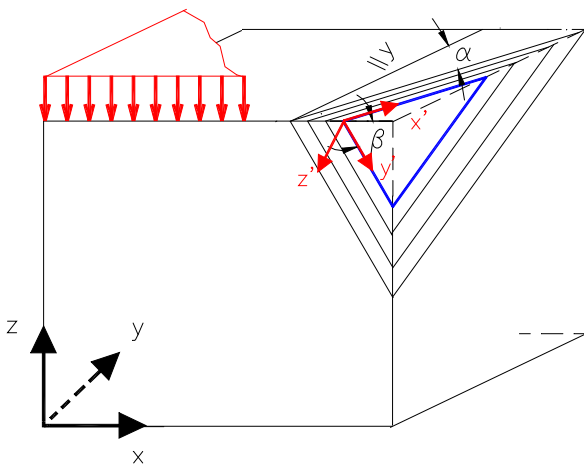
$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} & \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

③ ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОРАВИНАТА НА СИСТЕМАТА

(3-3)



$$[D'] = \begin{bmatrix} E_1 \frac{1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{\nu_1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{\nu_2}{m} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \frac{\nu_1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{1 - n\nu_2^2}{(1 + \nu_1)m} & E_1 \frac{\nu_2}{m} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \frac{\nu_1}{m} & E_1 \frac{\nu_2}{m} & E_1 \frac{1 - \nu_1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

където: $n = E_1/E_2$; $m = (1 - \nu_1 - 2n\nu_2^2)$ $G_2 \cong \frac{E_2}{[2(1 + \nu_2)]}$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

4 ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ВЕКТОРА НА НАТОВАРВАНЕТО и ПРИЛАГАНЕ на ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

► ВЕКТОР НА НАТОВАРВАНЕТО

- обемни сили $\{P_v\}$ с комп. P_{vx}, P_{vy}, P_{vz} по оси x, y, z : $\{P_v\} = \{P_{vx} \ P_{vy} \ P_{vz}\}^T$
- повърхнинни сили $\{P_s\}$ с компоненти P_{sx}, P_{sy}, P_{sz} $\{P_s\} = \{P_{sx} \ P_{sy} \ P_{sz}\}^T$
- концентрирани сили $\{P_c\}$ с компоненти P_{cx}, P_{cy}, P_{cz} $\{P_c\} = \{P_{cx} \ P_{cy} \ P_{cz}\}^T$
- начални деформации $\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_{x0} \ \varepsilon_{y0} \ \varepsilon_{z0} \ \gamma_{xy0} \ \gamma_{yz0} \ \gamma_{zx0}\}^T$
- начални напрежения $\{\sigma_0\} = \{\sigma_{x0} \ \sigma_{y0} \ \sigma_{z0} \ \tau_{xy0} \ \tau_{yz0} \ \tau_{zx0}\}^T$

Вектор на натоварването за един краен елемент:

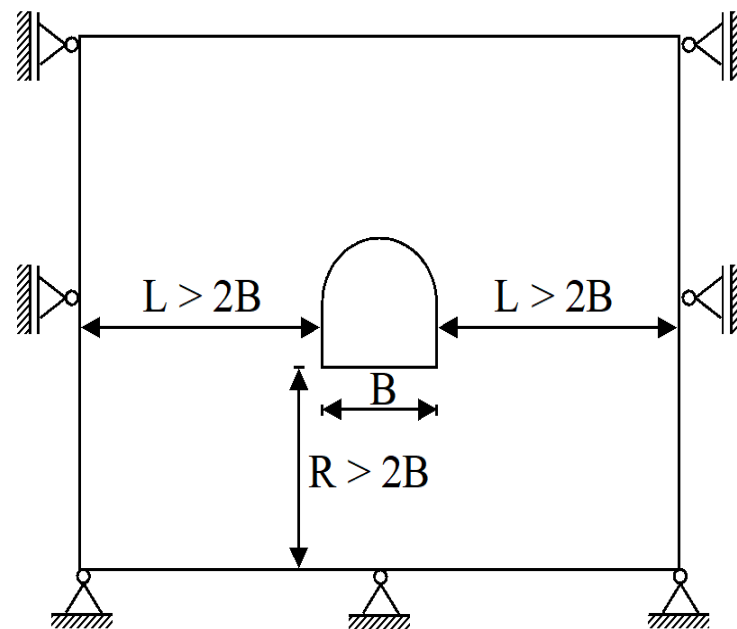
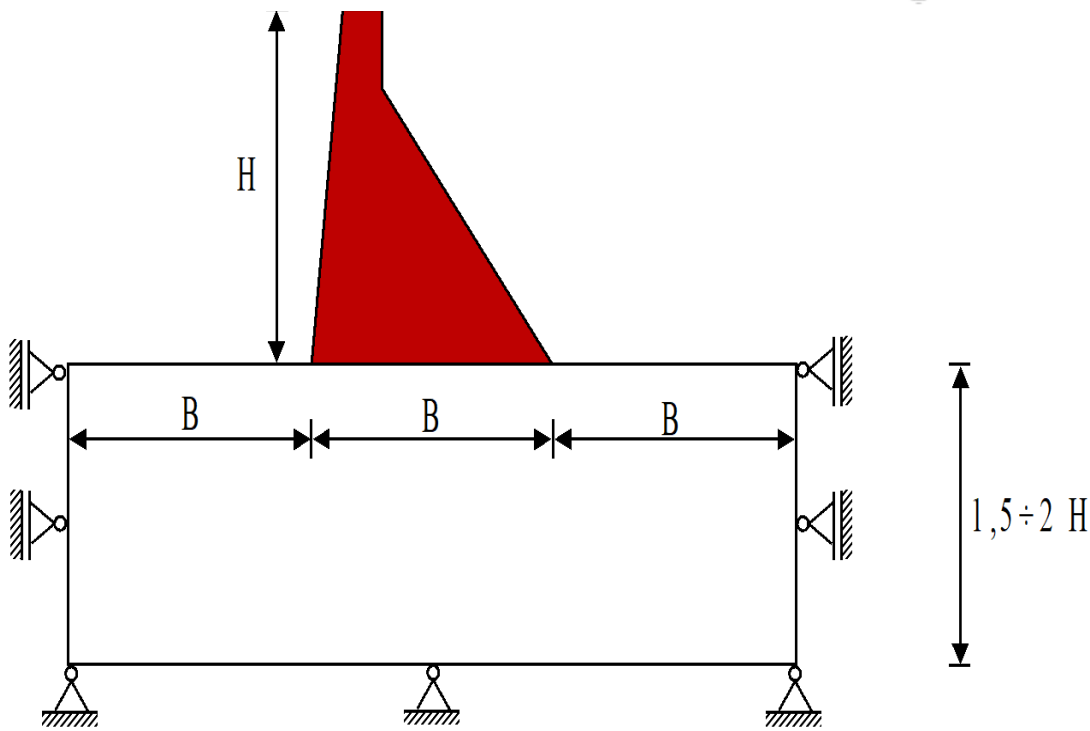
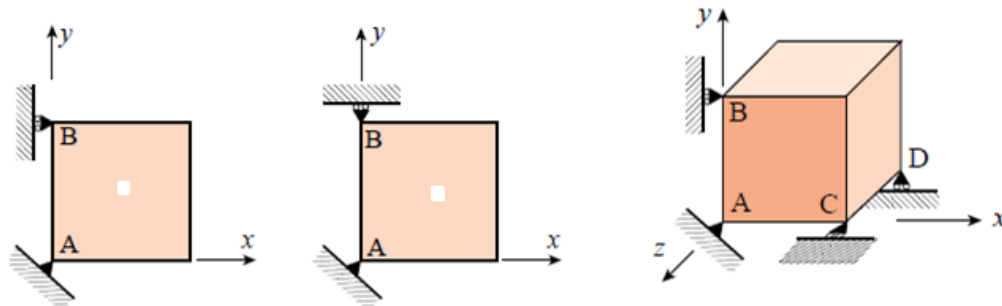
$$\{F^e\} = \iiint_{V^e} [N^T] \cdot \{P_v\} \cdot dV + \iint_{S^e} [N^T] \cdot \{P_s\} \cdot dS + \\ \iiint_{V^e} [B^T] \cdot [D] \{\varepsilon_0\} \cdot dV + \iiint_{V^e} [B^T] \cdot \{\sigma_0\} \cdot dV + \{P_c\}$$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

④ ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ВЕКТОРА НА НАТОВАРВАНЕТО и ПРИЛАГАНЕ на ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

► ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ



Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

5 РЕШАВАНЕ НА СИСТЕМАТА ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

$$\mathbf{x} = \{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \{b_i\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

6 ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КОМПОНЕНТИТЕ НА НДС

$$[K]\{u\} = \{F\} \longrightarrow \{u\}$$

$$\{u\} \longrightarrow \{\varepsilon\} = [B]\{u\}$$

$$\{\varepsilon\} \longrightarrow \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D[B]]\{u\}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T$$

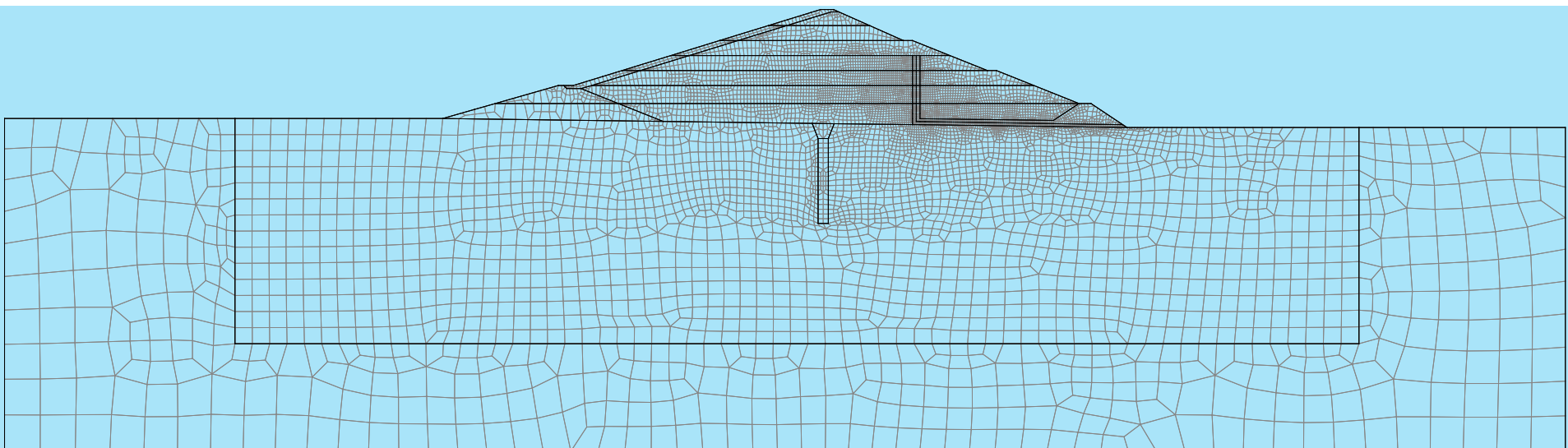
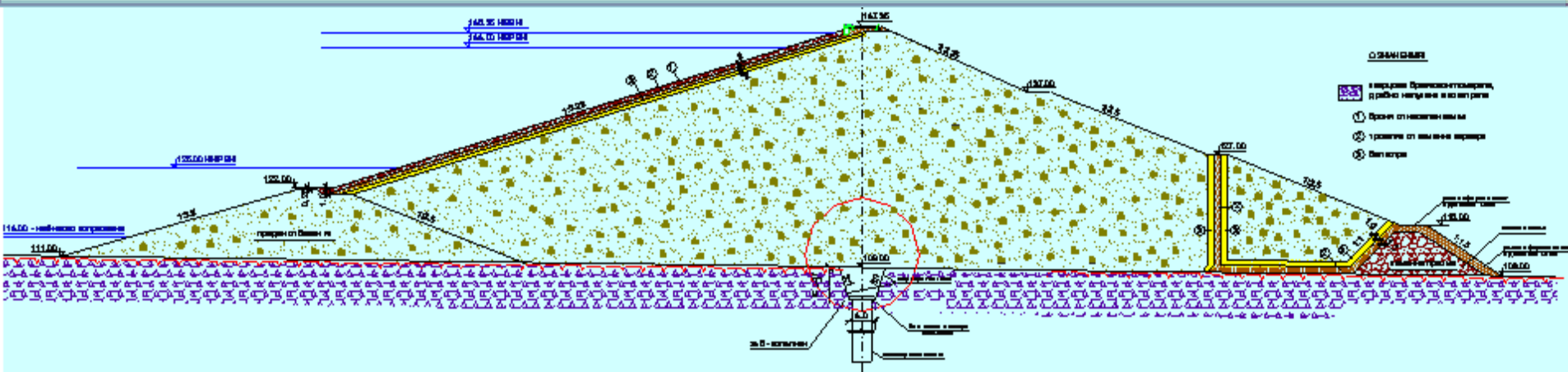
$$\{\sigma\} \longrightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3.$$

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

1 ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА

(1-6)

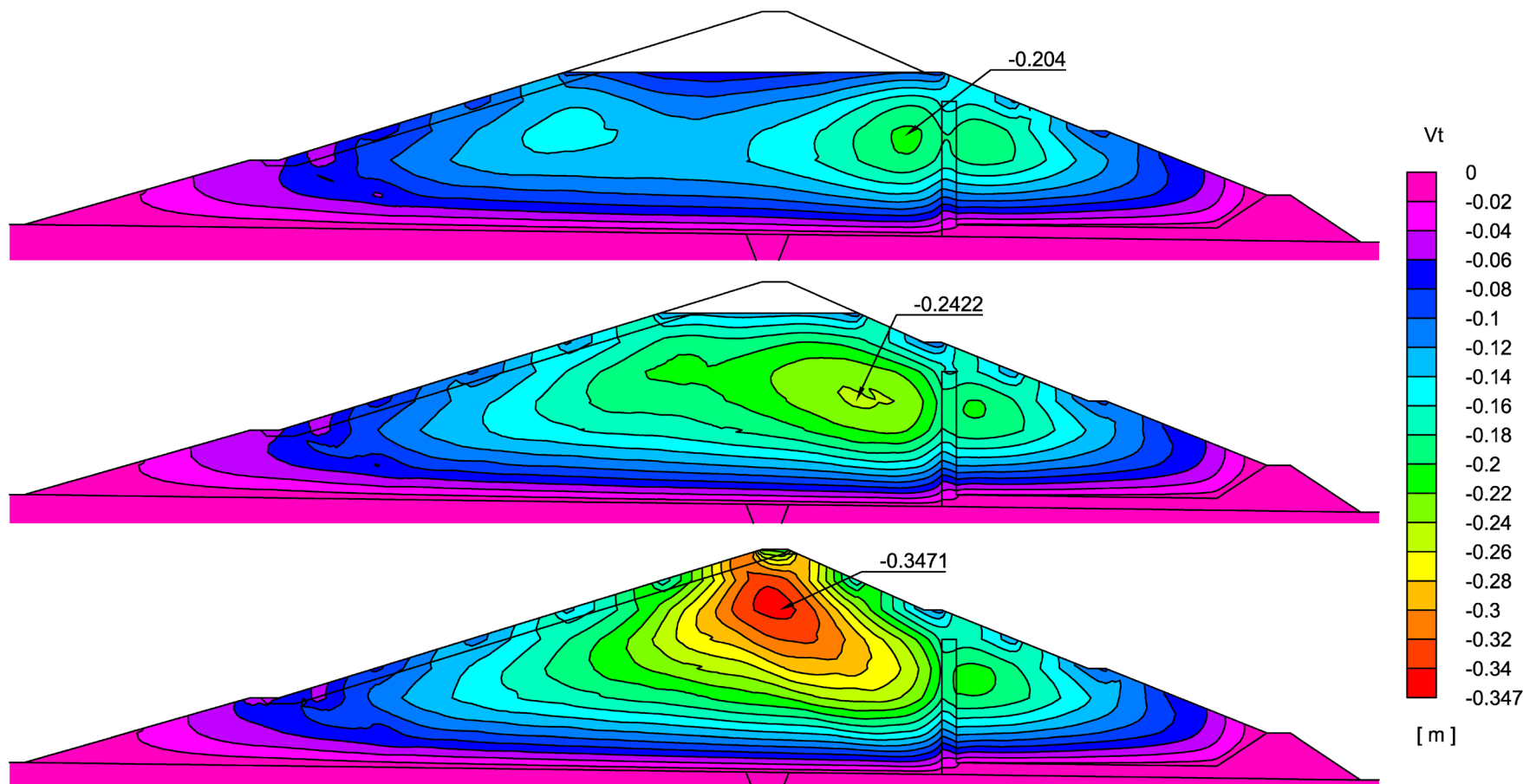


Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

1 ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА

(2-6)

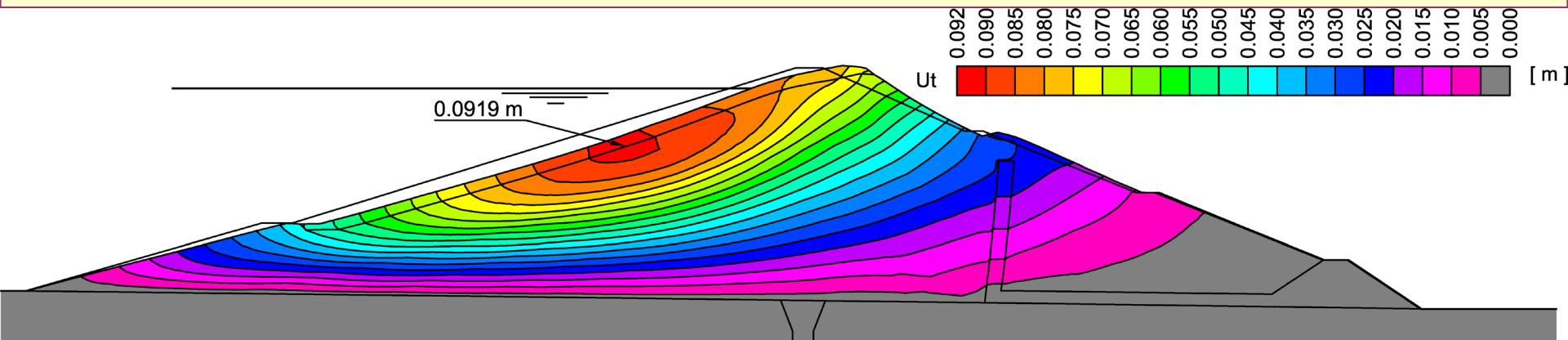


Вертикални премествания по време на строителството

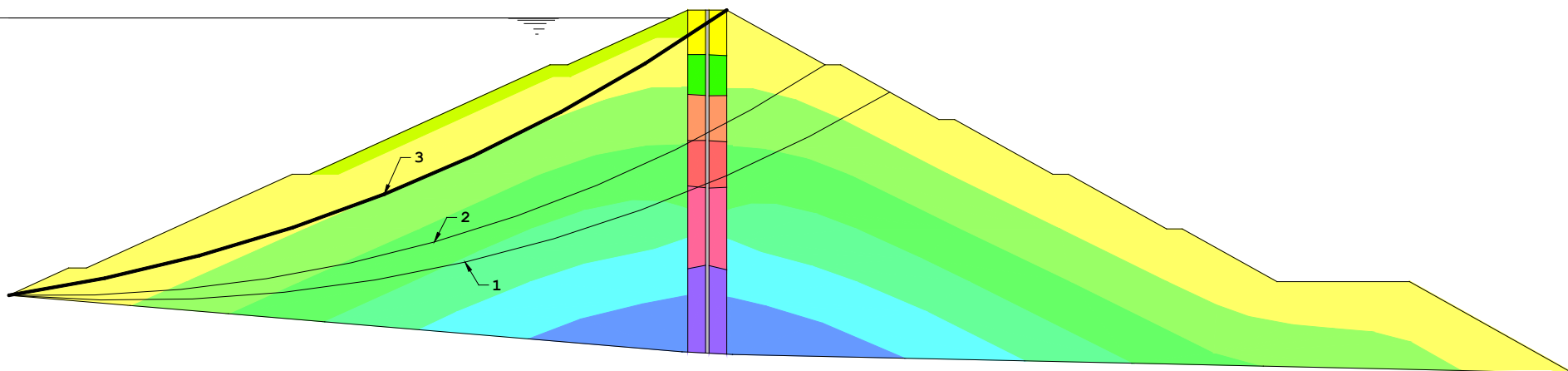
Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

1 ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА (3-6)



Хоризонтални премествания на стената само от завиряване



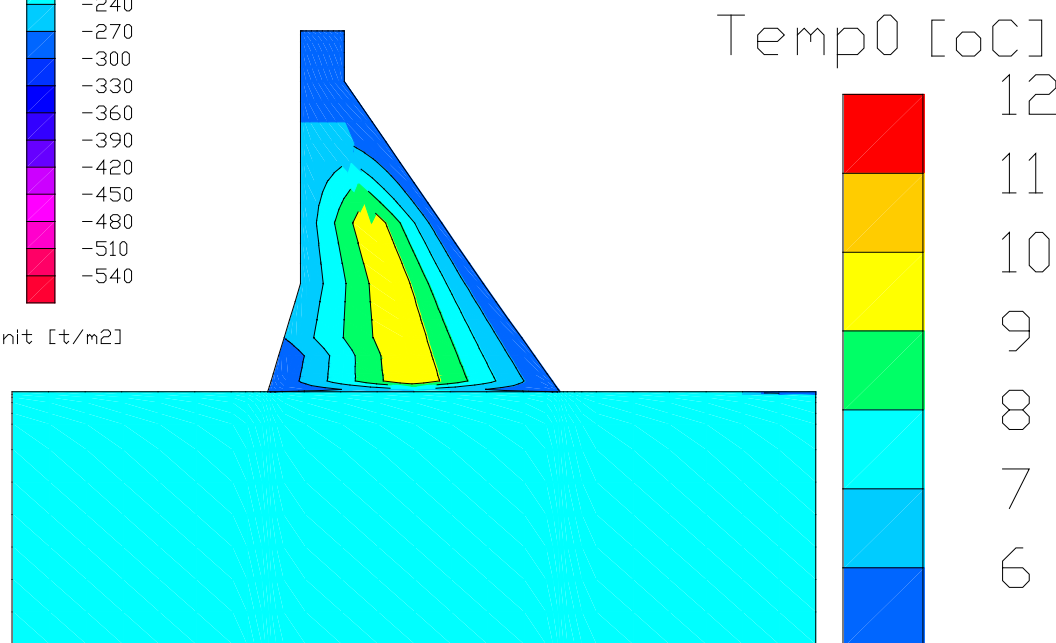
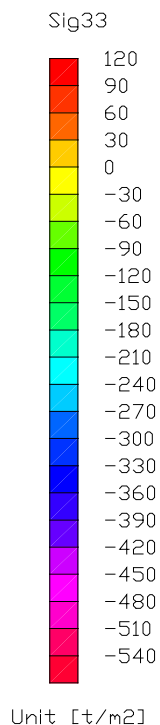
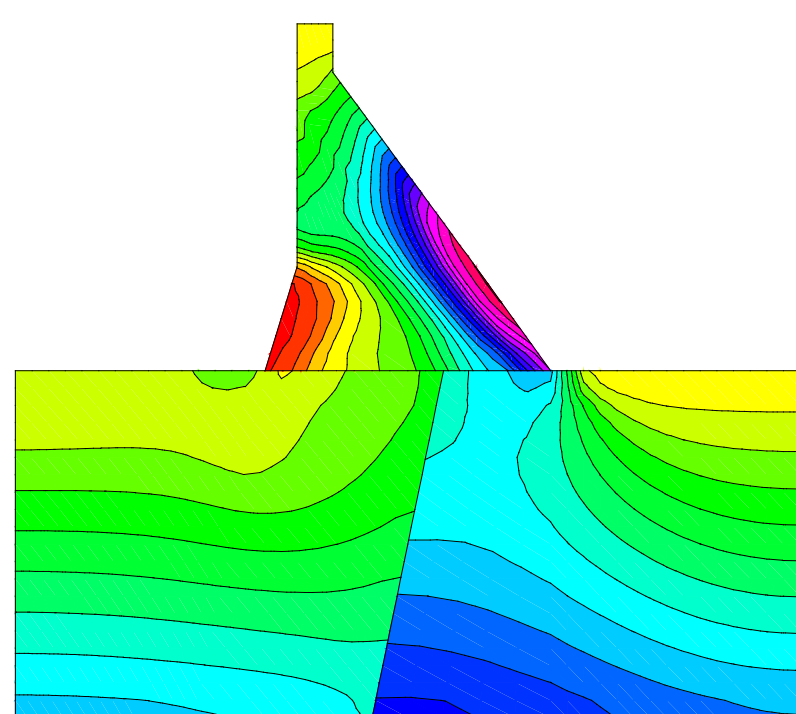
Ксиг за хлъзгателни повърхнини през през основната стъпка

Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

1 ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА

(4-6)



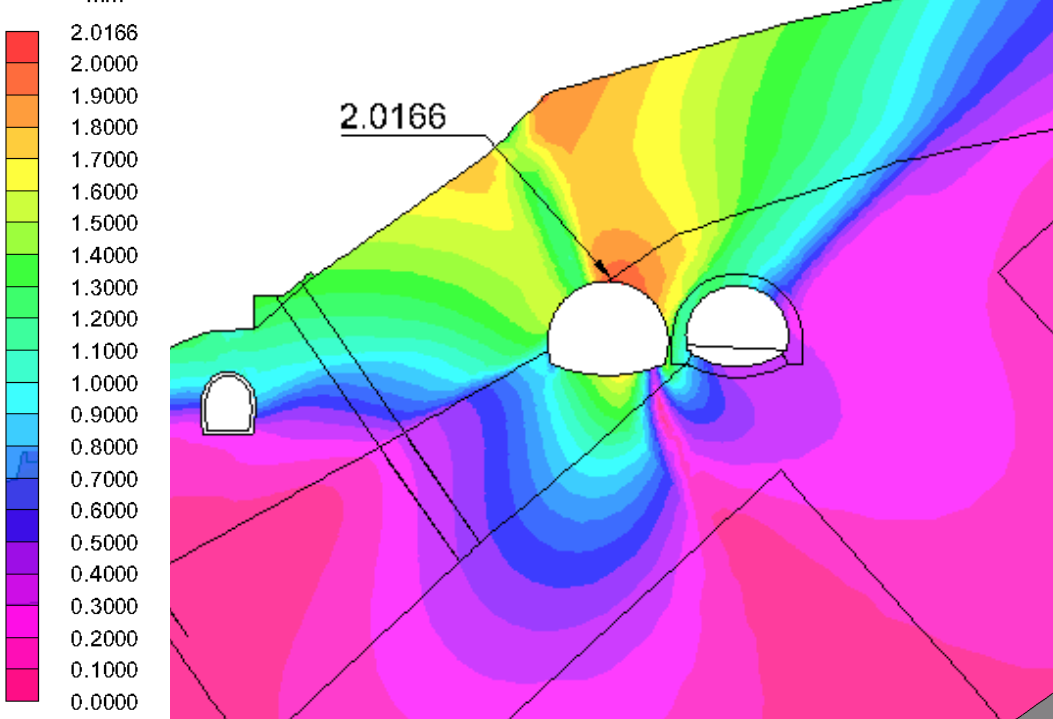
Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

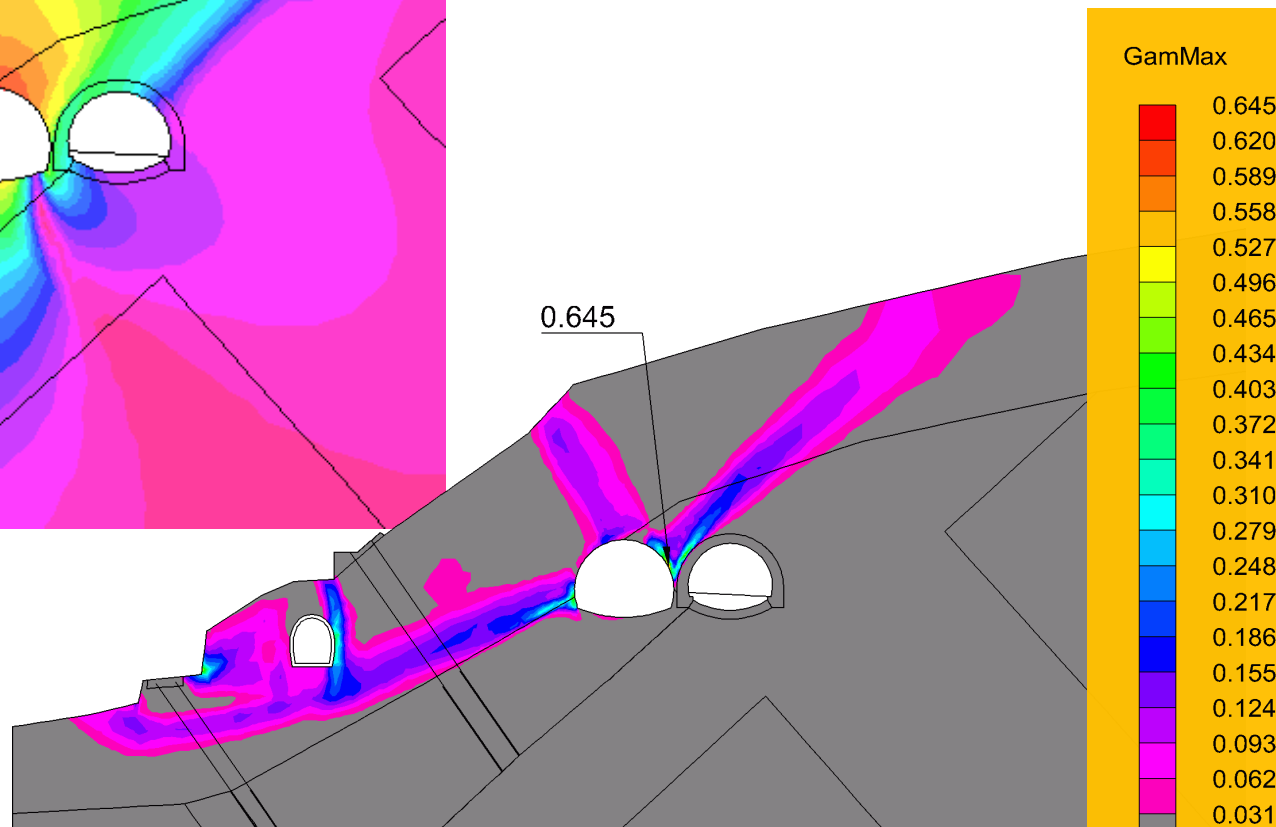
1 ИЗОБРАЖЯВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА

(5-6)

[UVI] mm



GamMax

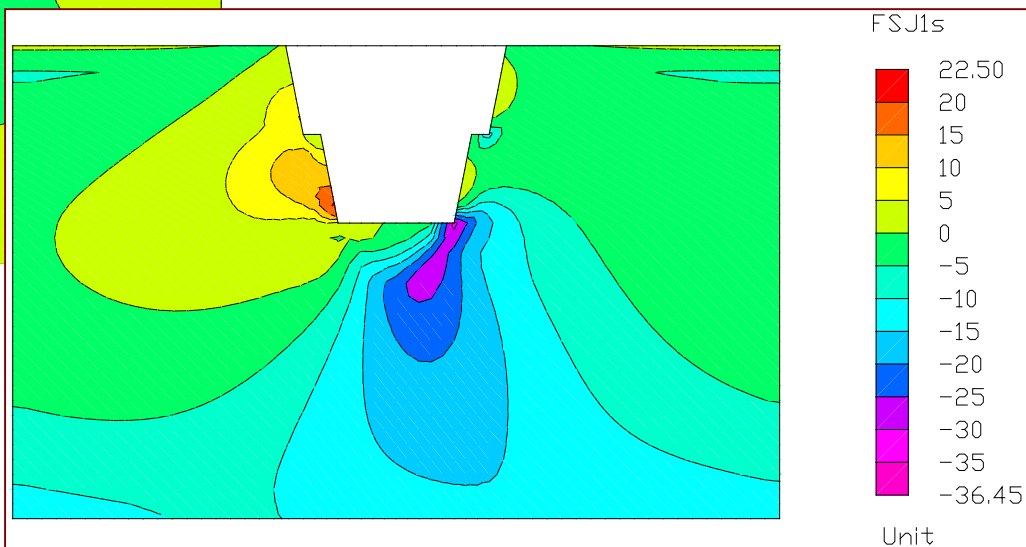
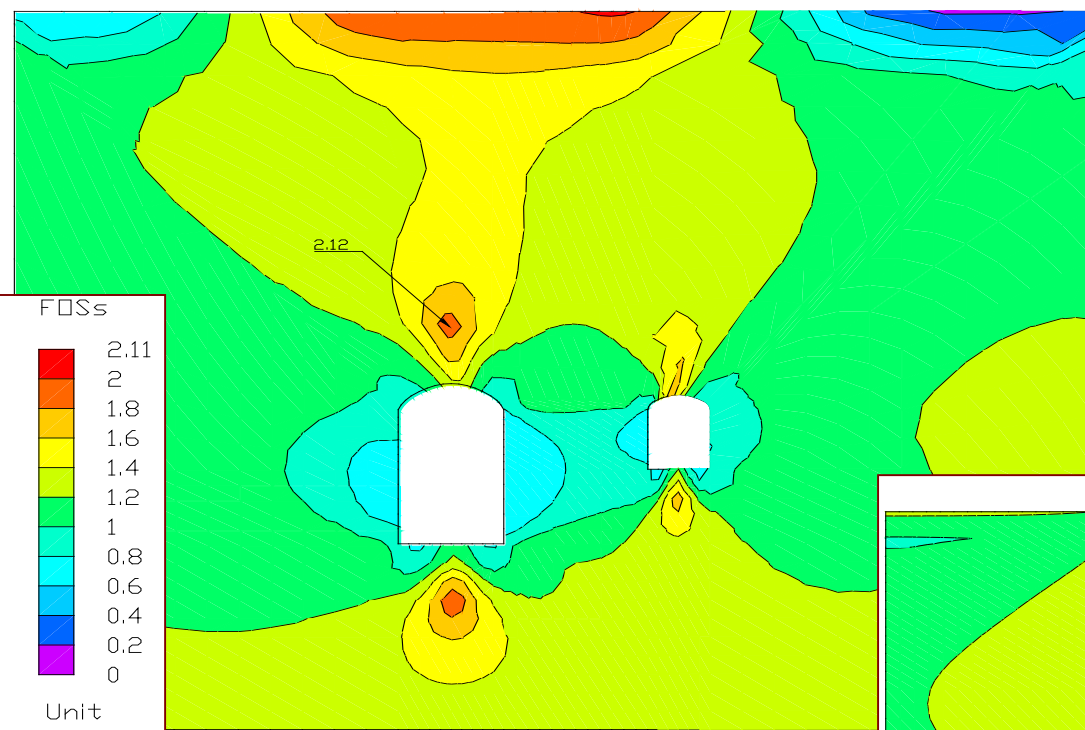


Метод на крайните елементи

III. ОСНОВНИ ЕТАПИ НА РЕАЛИЗАЦИЯ

1 ИЗОБРАЖАВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ИЗЧИСЛЕНИЯТА

(6-6)



Метод на крайните елементи

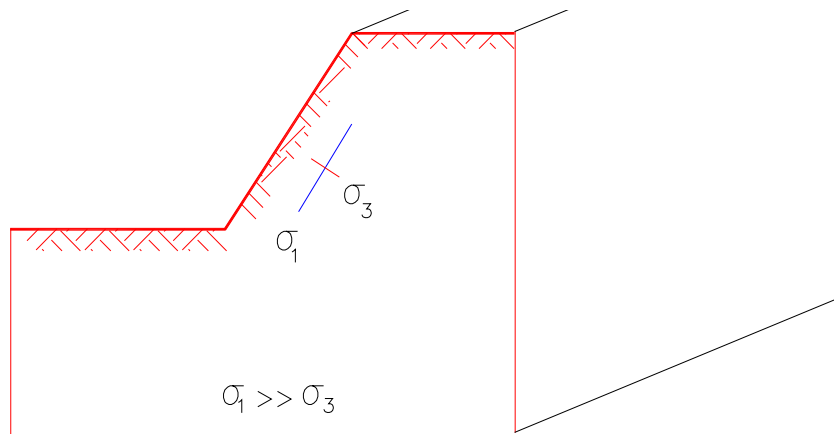
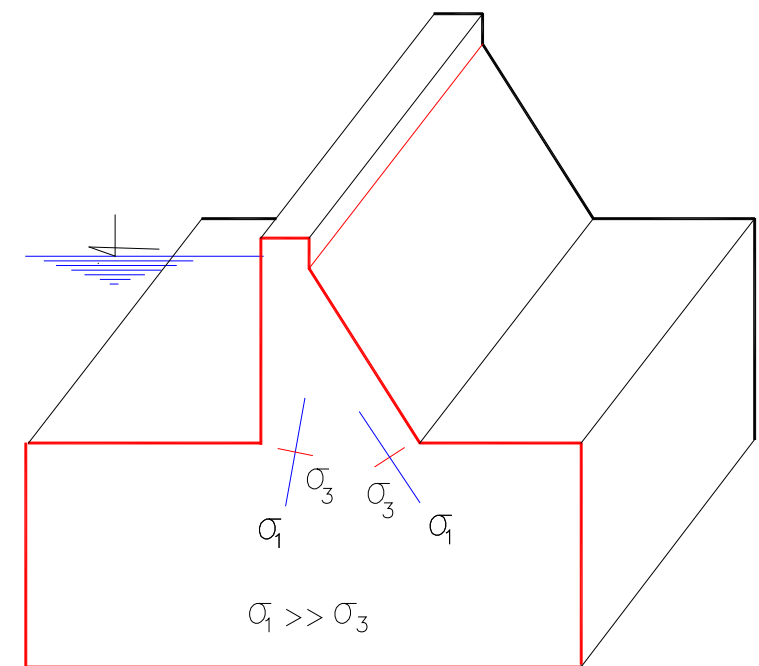
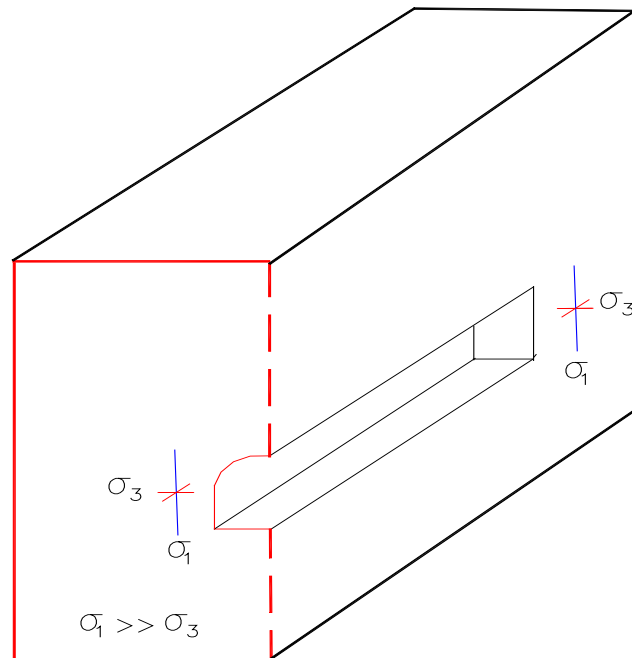
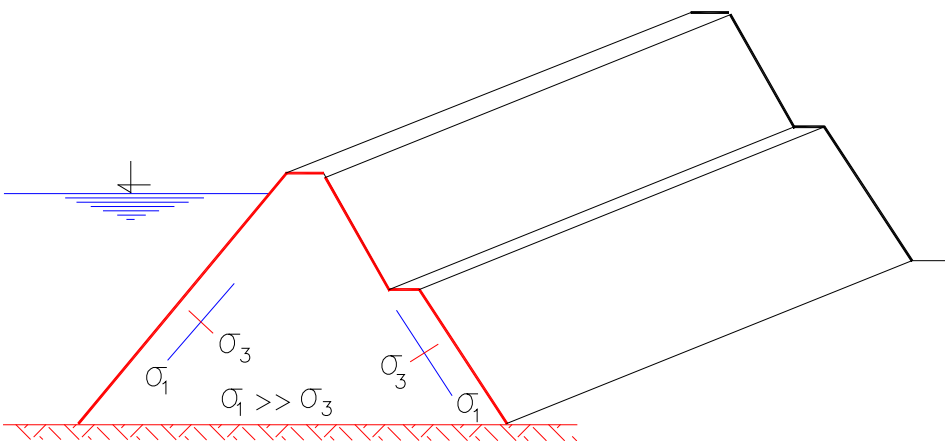
IV. МКЕ В ГЕОТЕХНИКАТА И ХИДРОТЕХНИКАТА

ОСОБЕНОСТИ

- Морфологична нелинейност (етапност на изграждане)
- Пластично (вискозо-пластично) поведение на материалите
- Деформационни характеристики, функция на напреженията
- Филтрация и консолидация
- Термонапрегнато състояние
- Пасивни и предварително напрегнати анкери
- Системи пукнатини в скалния масив
- Сеизмично натоварване

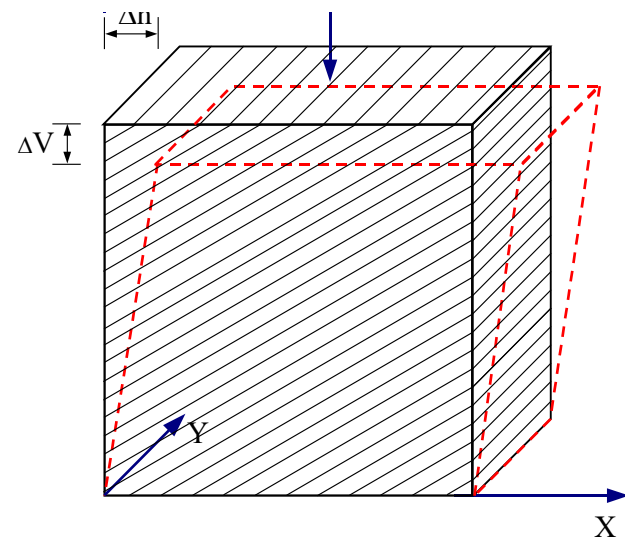
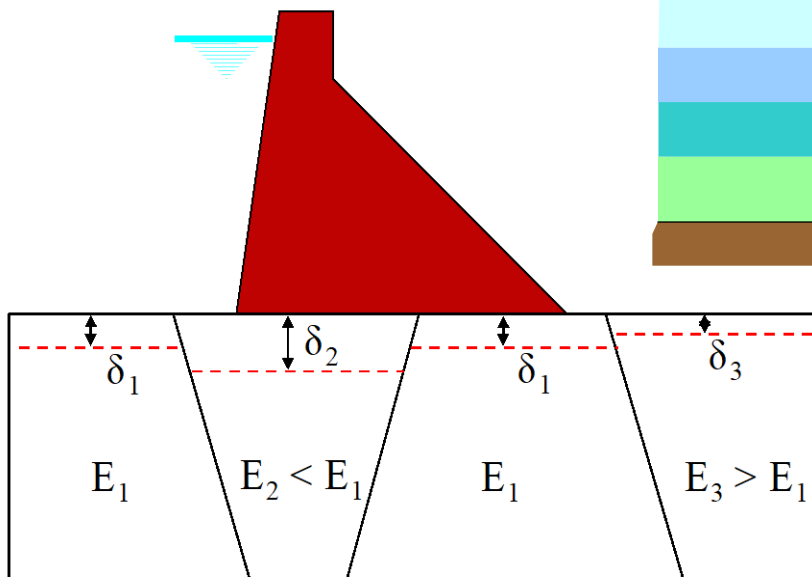
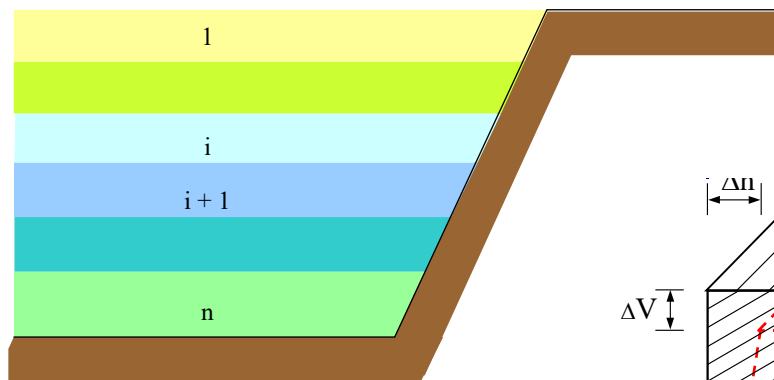
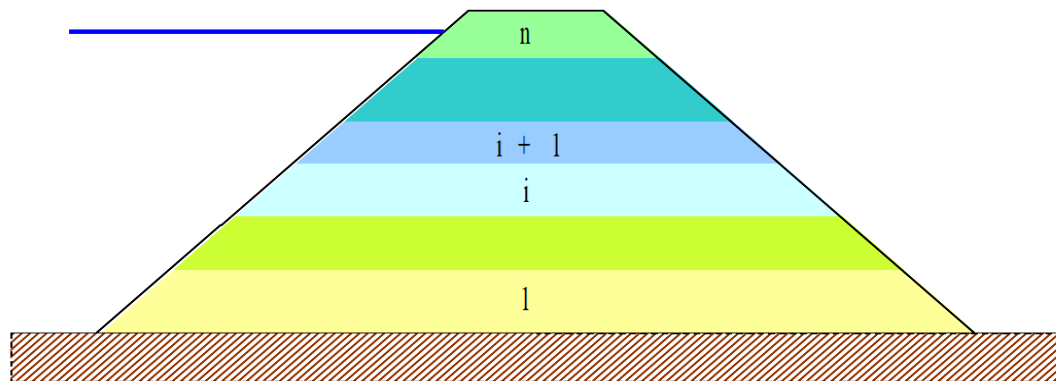
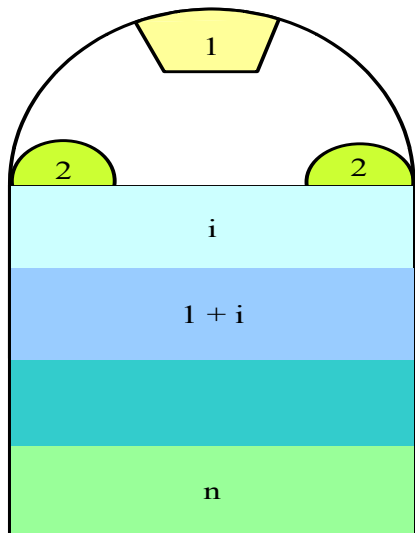
Метод на крайните елементи

IV. МКЕ В ГЕОТЕХНИКАТА И ХИДРОТЕХНИКАТА



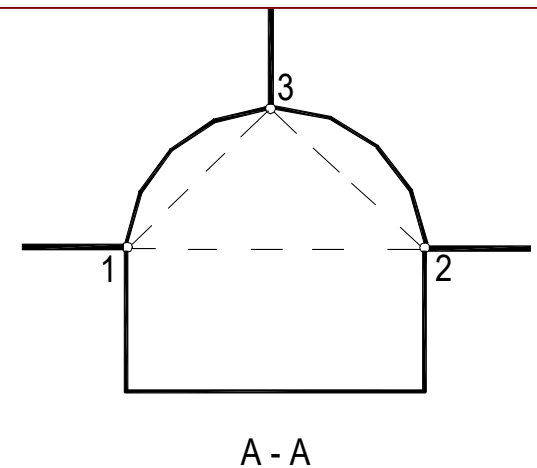
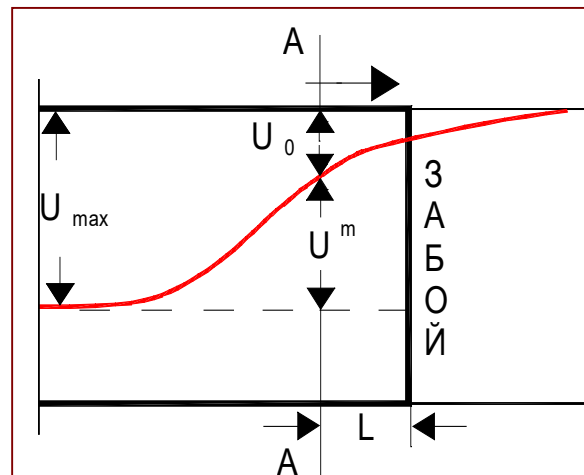
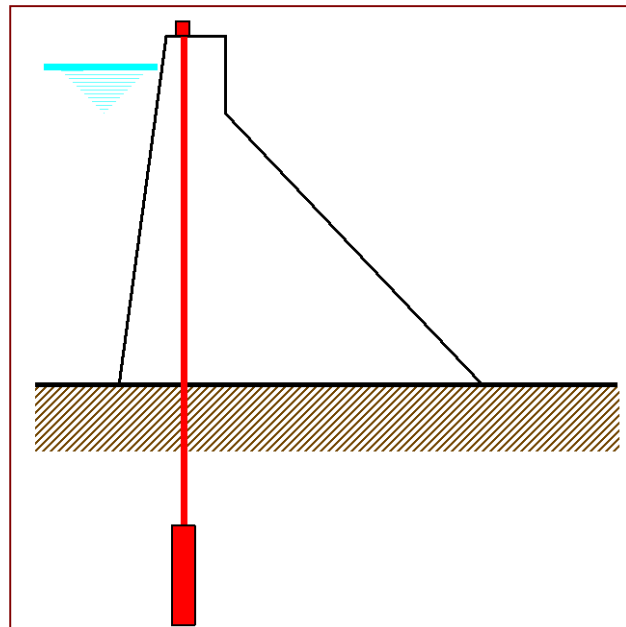
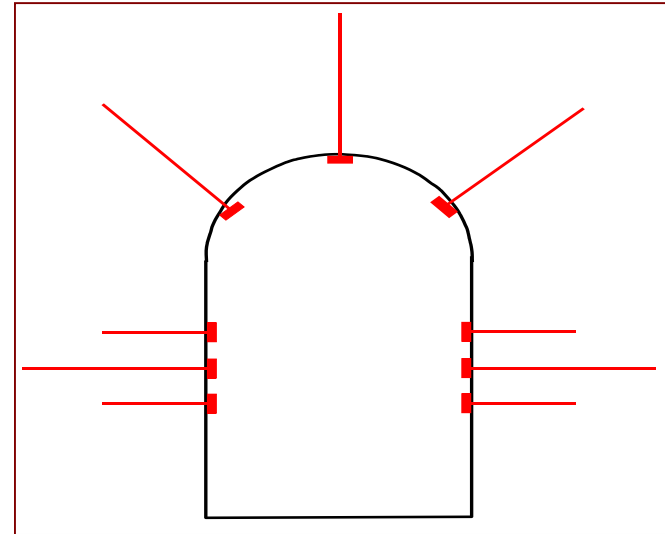
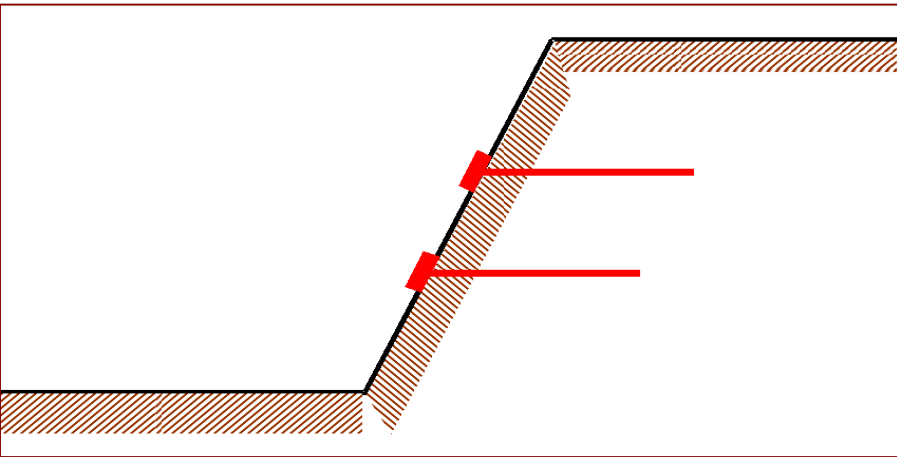
Метод на крайните елементи

IV. МКЕ В ГЕОТЕХНИКАТА И ХИДРОТЕХНИКАТА



Метод на крайните елементи

IV. МКЕ В ГЕОТЕХНИКАТА И ХИДРОТЕХНИКАТА

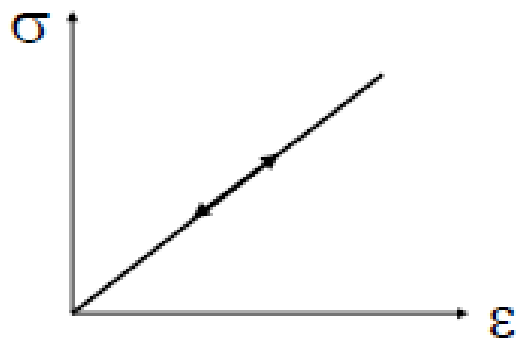


Метод на крайните елементи

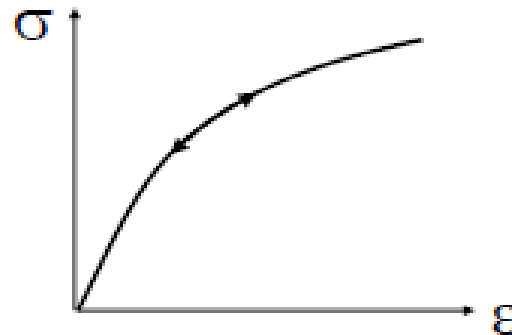
IV. МКЕ В ГЕОТЕХНИКАТА И ХИДРОТЕХНИКАТА

Зависимост “НАПРЕЖЕНИЯ – ДЕФОРМАЦИИ”

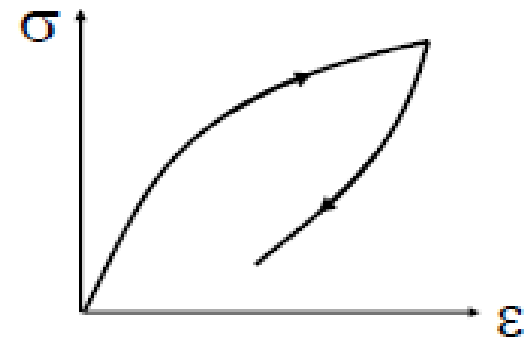
Линейно-еластична



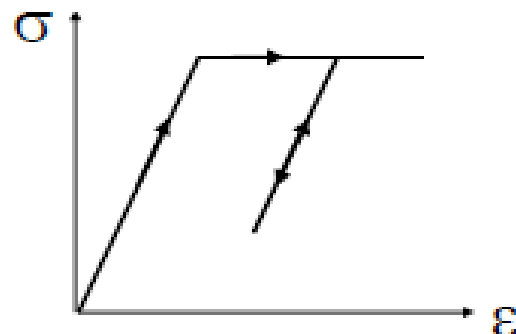
Нелинейно-еластична



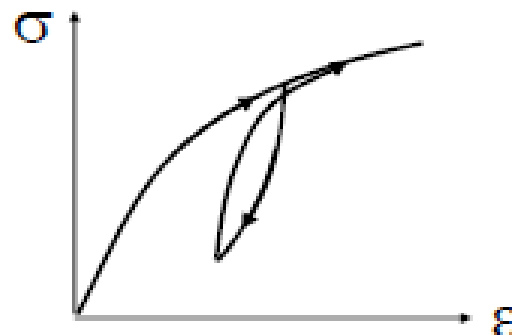
Еластопластична



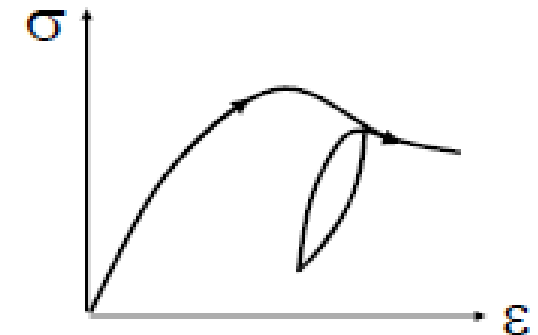
Линейно-еластична
-идеално-пластична



Еластопластична
(strain-hardening)



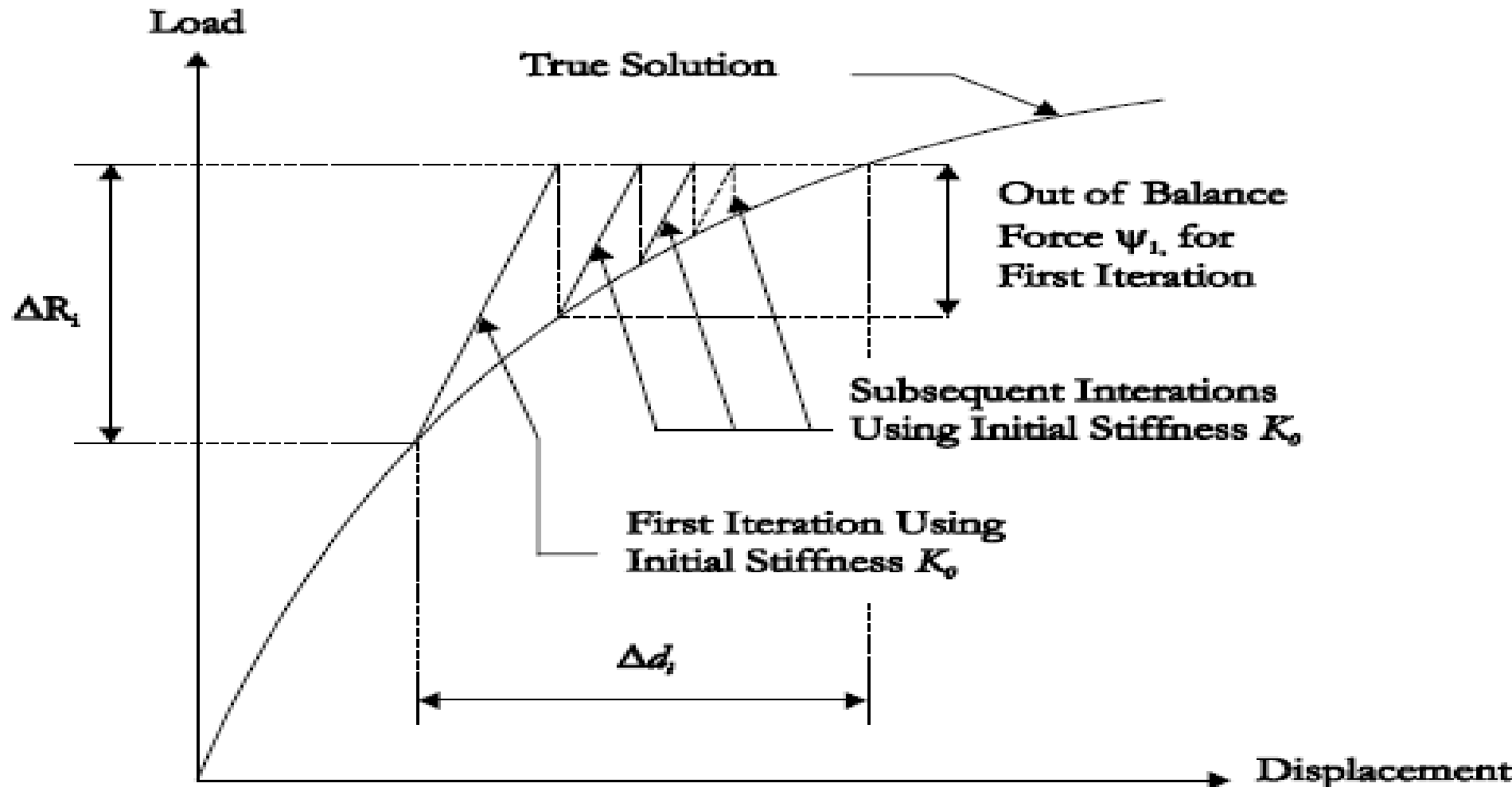
Еластопластична
(strain-softening)



Метод на крайните елементи

IV. МКЕ В ГЕОТЕХНИКАТА И ХИДРОТЕХНИКАТА

Зависимост “НАПРЕЖЕНИЯ – ДЕФОРМАЦИИ”



$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^{vp}\} + \{\varepsilon^0\} \quad (3.17)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^{vp}\} \quad (3.18)$$

$$\{\varepsilon^e\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{vp}\} \quad (3.19)$$

$$\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon^e\} \quad (3.20)$$

$$\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\} - [D].\{\varepsilon^{vp}\} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\{\sigma\}}{dt} = [D] \frac{d\{\varepsilon\}}{dt} - [D] \frac{d\{\varepsilon^{vp}\}}{dt} \quad (3.22)$$

$$\left\{ \frac{d\varepsilon^{vp}}{dt} \right\} = \gamma \prec f\left(\frac{F}{F_0}\right) \succ \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \quad (3.23)$$

$$\frac{d\{\sigma\}}{dt} = [D] \frac{d\{\varepsilon\}}{dt} - \gamma \prec f\left(\frac{F}{F_0}\right) \succ . [D] \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (3.24)$$

